2.1.2 Δυνάμεις

1. Δυνάμεις και Ιδιότητές τους

Ορισμοί: α) $\alpha^\nu = \alpha\cdot\alpha\cdots\alpha$ (ν φορὲς) β) $\alpha^0 = 1$ $(\alpha \neq 0)$

Ιδιότητες:

$\alpha^\mu \cdot \alpha^\nu = \alpha^{\mu+\nu}$	$\frac{\alpha^\mu}{\alpha^\nu} = \alpha^\mu : \alpha^\nu = \alpha^{\mu-\nu}$	$\left(\alpha^\mu\right)^\nu = \alpha^{\mu\nu}$
$\left(\alpha\beta\right)^\nu = \alpha^\nu\beta^\nu$	$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu = \frac{\alpha^\nu}{\beta^\nu}$	$\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu}$
$\frac{1}{\alpha^{-\nu}} = \alpha^\nu$	$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\nu$	$\left(-\alpha\right)^{2k} = \alpha^{2k}$ $\left(2k\text{: άρτιος}\right)$
$\left(-\alpha\right)^{2k+1} = -\alpha^{2k+1}$ $\left(2k+1\text{: περριτὸς}\right)$		$\alpha = \beta \Rightarrow \alpha^\nu = \beta^\nu$ (Προσοχή δεν ισχύει το αντίστροφο)

Παρατήρηση: Το μόνο που μπορώ να κάνω στην παράσταση $\alpha^\nu + \alpha^\mu$ είναι παραγοντοποίηση. Έστω $\nu < \mu$ τότε έχω : $\alpha^\nu + \alpha^\mu = \alpha^\nu + \alpha^\nu \cdot \alpha^{\mu-\nu} = \alpha^\nu\left(1 + \alpha^{\mu-\nu}\right)$

Προσοχή: $\left(\alpha+\beta\right)^\nu \neq \alpha^\nu + \beta^\nu$

2. Παρατήρηση:

Προσοχή όταν υψώνεται το πρόσημο (–) σε δύναμη. Π.χ.

$(-3)^2 = +9$ $\quad -3^2 = -9$

Στο δεύτερο παράδειγμα το (–) δεν υψώνεται στο τετράγωνο.

3. Πολλαπλάσια και Υποπολλαπλάσια

Υποπολλαπλάσια		**Πολλαπλάσια**	
d (deci)	10^{-1}	**da** (deka)	10^{1}
c (centi)	10^{-2}	**h** (hecto)	10^{2}
m (mili)	10^{-3}	**k** (kilo)	10^{3}
μ (micro)	10^{-6}	**M** (mega)	10^{6}
n (nano)	10^{-9}	**G** (giga)	10^{9}
p (pico)	10^{-12}	**T** (tera)	10^{12}
f (femto)	10^{-15}	**P** (peta)	10^{15}
a (atto)	10^{-18}	**E** (exa)	10^{18}

4. Δυνάμεις Αριθμών :

α	**α²**	**α**	**α²**
1	1	11	121
2	4	12	144
3	9	13	169
4	16	14	196
5	25	15	225
6	36	16	256
7	49	20	400
8	64	25	625
9	81	30	900
10	100	40	1600

2	**3**	**4**	**5**	**10**
$2^2 = 4$	$3^2 = 9$	$4^2 = 16$	$5^2 = 25$	$10^2 = 100$
$2^3 = 8$	$3^3 = 27$	$4^3 = 64$	$5^3 = 125$	$10^3 = 1000$
$2^4 = 16$	$3^4 = 81$	$4^4 = 256$	$5^4 = 625$	$10^4 = 10000$
$2^5 = 32$	$3^5 = 243$	$4^5 = 1.024$		
$2^6 = 64$		$4^6 = 4.096$		
$2^7 = 128$				
$2^8 = 256$				
$2^9 = 512$				
$2^{10} = 1.024$				
$2^{11} = 2.048$				
$2^{12} = 4.096$				

5. Προτεραιότητα Πράξεων

Προηγούνται οι πράξεις μέσα στις παρενθέσεις, ακολουθούν οι δυνάμεις, ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση και μετά η πρόσθεση και η αφαίρεση. Όταν έχουμε πολλές παρενθέσεις ξεκινάμε τις πράξεις από τη εσωτερική παρένθεση.

Π.χ. $5^2 - 3\cdot 2^2 + 2^5 : 8 - 4 = 25 - 3\cdot 4 + 32 : 8 - 4 = 25 - 12 + 4 - 4 = 13$

$(-3+2)^2 - 15 : 5 + 2\cdot 3 - (1-2)^3 = (-1)^2 - 15 : 5 + 2\cdot 3 - (-1)^3 = 1 - 15 : 5 + 2\cdot 3 - (-1) = 1 - 3 + 6 + 1 = 5$

Ασκήσεις

91. Αντιστοιχίστε κάθε ισότητα της στήλης (Α) με το αντίστοιχο της στήλης (Β).

στήλη (Α) ισότητα	**στήλη (Β) τιμή του κ**
	1. 3
Α. $(\alpha^{-2})^{\kappa+1} = \alpha^8$	**2.** – 3
Β. $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\kappa} = 1$	**3.** – 5
	4. 0
Γ. $[(\alpha\cdot\beta)^{\kappa}]^{-1} = (\beta\cdot\alpha)^3$	**5.** 5
Δ. $\alpha^5 (\alpha^{\kappa-2})^{-1} = \alpha^2$	**6.** – 6
	7. 6

Απάντηση :

Α	
Β	
Γ	
Δ	

92. Αν ισχύει $10^{-5\alpha}\cdot 10^{6\alpha} = 10^{1000000}$, τότε ο α ισούται με :
Α. 10^3 **Β.** 1000 **Γ.** ένα εκατομμύριο **Δ.** 20.000 **Ε.** 10^{-8}

93. Αν $\alpha^{x-y} = \alpha^{x^2+x}\cdot\frac{1}{\alpha^y}$, $(\alpha \neq 0)$, τότε :
Α. χ=y **Β.** χ=0 , $y\in\mathbb{R}$ **Γ.** χ=0 , y=0 **Δ.** χ=1 ή χ=0 **Ε.** χ=1 , y=–1

94. Αν κ άρτιος ακέραιος αριθμός, τότε η τιμή της παράστασης $1^{\kappa} + (-1)^{\kappa+1} + 1^{\kappa+2} + (-1)^{\kappa+3}$ είναι :
Α. 4 **Β.** – 4 **Γ.** 3 **Δ.** 0 **Ε.** 2

95. Αν $χ = 0{,}02$ και $y = 0{,}0001$, τότε η τιμή της παράστασης $10^8 \cdot χ^2 \cdot y$ είναι :
Α. $4{\cdot}10^8$ **Β.** 4 **Γ.** 100 **Δ.** 8 **Ε.** 10

96. Αν ισχύει $\dfrac{9^ν}{3^{ν+1}} = 27$, τότε η τιμή του φυσικού αριθμού ν είναι :
Α. 2 **Β.** 3 **Γ.** 5 **Δ.** 4 **Ε.** 9

97. Δίνεται ο αριθμός $α = 84{\cdot}χ$, όπου χ θετικός ακέραιος. Η μικρότερη τιμή του χ ώστε ο αριθμός α να είναι τέλειο τετράγωνο, είναι :
Α. 84 **Β.** 21 **Γ.** 42 **Δ.** 12 **Ε.** 24

98. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις αν είναι Σωστή **(Σ)** ή Λάθος **(Λ)**.

1.	$(-1)^5 = -1^8$	**Σ**	**Λ**	2.	$(-1)^{10} = -1^{15}$	**Σ**	**Λ**
3.	$5^0 = (-3)^0$	**Σ**	**Λ**	4.	$-13^0 = -(-2)^0$	**Σ**	**Λ**
5.	$-3^2 \cdot (-3)^4 = (-3)^6$	**Σ**	**Λ**	6.	$-5^5 \cdot (-5)^3 = 5^8$	**Σ**	**Λ**

7.	Ισχύει $(-3)^2 = 9$.	**Σ**	**Λ**
8.	Είναι $α^{-3} = \dfrac{1}{α^3}$ αν $α \neq 0$.	**Σ**	**Λ**
9.	Αν $α = β$, τότε $α^2 + β^2 = 2αβ$.	**Σ**	**Λ**
10.	Για $α, β \in \mathbf{R}$, οι αριθμοί $α - β$ και $β - α$ είναι αντίθετοι.	**Σ**	**Λ**
11.	Για κάθε πραγματικό αριθμό $α \neq 0$ ισχύει: $[(-α)^1]^0 = 1$.	**Σ**	**Λ**
12.	Για κάθε πραγματικό αριθμό $α \neq 0$ ισχύει: $[(-α)^1]^2 = -1$.	**Σ**	**Λ**
13.	$[(-3)^3]^4 = [(-3)^4]^3$.	**Σ**	**Λ**
14.	Αν $α, β \in \mathbf{R}$ είναι ίσοι, τότε: $α^κ = β^κ$, για κάθε ακέραιο αριθμό κ.	**Σ**	**Λ**
15.	Αν $α^κ = β^κ$ και $α{\cdot}β \neq 0$, τότε ισχύει πάντα : $α = β$.	**Σ**	**Λ**
16.	Αν $α{\cdot}β \neq 0$, τότε ισχύει : $[(α{\cdot}β)^ν]^{-1} = [(β{\cdot}α)^{-1}]^ν$.	**Σ**	**Λ**
17.	Αν $α{\cdot}β \neq 0$ και ν φυσικός αριθμός, τότε: $\left(\dfrac{α}{β}\right)^ν = \left(\dfrac{β}{α}\right)^{-ν}$.	**Σ**	**Λ**
18.	Αν κ περιττός αριθμός με $α \neq 0$ και $α \neq \pm 1$, τότε : $α^κ = α^{-κ}$.	**Σ**	**Λ**
19.	Αν κ άρτιος αριθμός και $α \neq 0$, τότε : $-α^κ = (-α)^κ$.	**Σ**	**Λ**
20.	Το γινόμενο $(0{,}1{\cdot}10^{-6}){\cdot}(0{,}3{\cdot}10^{13}){\cdot}(0{,}1{\cdot}10^4)$ ισούται με τρία δισεκατομμύρια.	**Σ**	**Λ**
21.	Αν $(α^κ)^2 = (β^2)^κ$ και $αβ \neq 0$, τότε $α^2 = β^2$.	**Σ**	**Λ**
22.	Ο μοναδικός αριθμός που είναι ίσος με τον αντίστροφό του είναι το 1.	**Σ**	**Λ**
23.	Οι αριθμοί $α^ν$ και $α^{-ν}$ είναι αντίθετοι.	**Σ**	**Λ**
24.	Οι αριθμοί $α^ν$ και $α^{-ν}$ είναι αντίστροφοι.	**Σ**	**Λ**
25.	$\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-1} = -\dfrac{4}{3}$.	**Σ**	**Λ**

99. Αν $α, β \in \mathbf{R}^*$ και ισχύει : $\dfrac{α}{β} = \dfrac{2}{3}$ **(1)**

1) Να συμπληρώσετε τις παρακάτω προτάσεις :

1.	Αν $β = 6$ τότε $α = \ldots\ldots$	2.	Αν $β = 0{,}3$ τότε $α = \ldots\ldots$
3.	Αν $β = 12$ τότε $α = \ldots\ldots$	4.	Αν $β = \dfrac{2}{3}$ τότε $α = \ldots\ldots$

2) Να αποδείξετε ότι $\left(\dfrac{α+β}{β}\right) - \left(\dfrac{β-α}{β}\right)^2 = \dfrac{14}{9}$

100. Ποιος είναι ο μεγαλύτερος από τους αριθμούς : $\left(2^2\right)^2$, 222 , 22^2 , 2^{22} , $2^{\left(2^2\right)}$

101. Να βρείτε το πρόσημο των αριθμών :

1.	$(-12)^5$	2.	$(-3)^8$	3.	$(-17)^{18}$	4.	-3^8	5.	$-(-2)^2$
6.	$-\left(-\frac{1}{4}\right)^3$	7.	$-(-2)^{11}$	8.	$-\left(-\frac{1}{4}\right)^{12}$	9.	$\left[-(-(-2))\right]^4$	10.	$-(-3)^{22}$

102. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

1.	$(-3)^2$	2.	-3^3	3.	$(-3)^3$	4.	-3^4	5.	$(-3)^4$
6.	2^4	7.	$(-2)^7$	8.	-2^7	9.	$(-4)^{-3}$	10.	3^{-4}
11.	$(-5)^{-4}$	12.	3^{-3}	13.	2^3	14.	3^3	15.	$(-1)^4$
16.	$\left(\frac{1}{4}\right)^2$	17.	$\left(\frac{4}{5}\right)^{-3}$	18.	$\left(\frac{7}{8}\right)^{-2}$	19.	$\left(-\frac{1}{4}\right)^{-4}$	20.	$\left(\frac{5}{4}\right)^{-2}$
21.	$(-2)^5$	22.	-5^2	23.	$-(-6)^2$	24.	-2^{-2}	25.	$(-3)^2-3^2$
26.	$-\left(-\frac{2}{3}\right)^4$	27.	$-\left(\frac{3}{2}\right)^3$	28.	$-\frac{1}{-3^{-3}}$	29.	$\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}-\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}$	30.	$(-3)^3-\frac{1}{3^{-2}}$

103. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων :

1.	$\frac{5^3\cdot 5^7}{5^8}$	2.	$6^{-3}\cdot 6^2$	3.	$4^{-5}:4^{-7}$	4.	$12^{-3}:6^{-3}$
5.	$2^{-2}\cdot 5^{-2}$	6.	$(-3)^1\cdot(-3)^3$	7.	$2^3\cdot 2^4$	8.	$\frac{(3^5\cdot 3^{-2})^3}{3^6}$
9.	$2\cdot 2^3\cdot 2^5$	10.	$[-(3)^3]^{-2}$	11.	$5^6\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^6$	12.	$(2^2)^5$
13.	$(-20)^3:4^3$	14.	$\frac{8^4}{2^4}$	15.	$\left(2^3\right)^4\cdot 2^{-7}\cdot 2^{-2}$	16.	$(0{,}25)^6\cdot 40^6$
17.	$(2^{20}\cdot 2^7\cdot 2):2^{25}$	18.	$\frac{\left(4^5\right)^3\cdot 4^{-9}}{\left(4^5\cdot 4^{-7}\right)^{-2}}$	19.	$[(-10)^2]^3$	20.	$(-2)^4\cdot 5^4$
21.	$(0{,}25)^7\cdot 40^7$	22.	$7^{-4}\cdot 7^3$	23.	$5^{-4}:5^{-6}$	24.	$\frac{2^9\cdot 5^6}{2^6\cdot 5^5}$
25.	$3^{-4}:4^{-4}$	26.	$14^{-3}:7^{-3}$	27.	$\frac{21^5}{7^5}$	28.	$[(-2)^4]^{-3}$
29.	$(-30)^4:6^4$	30.	$\frac{18^3}{6^3}$	31.	$(-8{,}4)^3:(2{,}8)^3$	32.	$2^4\cdot 4^4\cdot 1{,}25^4$
33.	$(-20{,}4)^2:(3{,}4)^2$	34.	$\frac{10^7}{5^7}$	35.	$\frac{5^9\cdot 5^{-2}}{5^5}$	36.	$\left(\frac{5}{6}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{6}{5}\right)^{-1}$
37.	$7^4\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^4$	38.	$\left(\frac{7}{8}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{8}{7}\right)^{-1}$	39.	$\frac{6^8\cdot 6^{-2}}{6^4}$	40.	$\left(\frac{3}{27}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{4}{8}\right)^{-3}$
41.	$\left(\frac{5}{10}\right)^{-2}$	42.	$\left(\frac{3^2}{2^3}\right)^4\cdot\left(\frac{2^7}{3^5}\right)^2$	43.	$\frac{5^{-3}}{3^7}:\left(\frac{5^2}{3^{-3}}\right)^{-2}$	44.	$2^{12}\cdot 8^{-3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$
45.	$8^5\cdot 16^{-3}$	46.	$3^5\left(\frac{1}{9}\right)^8\cdot 27^3$	47.	$2^9\cdot 5^6$	48.	$2^{10}\cdot 2{,}5^5$
49.	$4^6\cdot(-1{,}25)^4$	50.	$4^3\cdot 5^6$	51.	$8^5\cdot 2^{-11}$	52.	$\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{5}{3}\right)^{-2}$
53.	$8^4\cdot 4^{-5}$	54.	$2^{11}\cdot 3^9\cdot 6^{-8}$	55.	$4^{15}\cdot 9^{14}\cdot 6^{-27}$	56.	$\frac{12^{13}}{2^{24}\cdot 3^{12}}$

57.	$\dfrac{8^9\cdot 6^5}{2^{29}\cdot 3^4}$	58.	$\dfrac{3^{24}\cdot 3^{14}}{\left(3^5\right)^7}$
59.	$\dfrac{12^{10}}{18^5\cdot 8^3}$	60.	$0{,}5^{-6}\cdot 5^5$
61.	$(7^5\cdot 2^3\cdot 3^{-6})\cdot(7^{-5}\cdot 2\cdot 3^4)$	62.	$\left(-\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^4$
63.	$(-4)^1+(-4)^2+(-4)^3+(-4)^4$	64.	$\left(\frac{1}{4}\right)^3\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^3$
65.	$\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}+2^{-3}+\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2$	66.	$-3^2+3^3-3^4+(-3)^5$
67.	$\left(2^{16}\cdot 8^{-4}\right)^6\cdot(-0{,}5)^{20}$	68.	$\dfrac{(-12)^5}{6^5}-\dfrac{14^4}{(-7)^4}+\dfrac{6^3}{(-2)^3}$
69.	$-2^4+3^4-4^3+(-3)^5$	70.	$2\left(-\frac{1}{2}\right)^3-3\left(-\frac{1}{2}\right)^2-(-2)^{-1}+(-1)^{2020}$
71.	$\dfrac{(-12)^4}{6^4}-\dfrac{18^3}{(-9)^3}+\dfrac{20^4}{(-10)^4}$	72.	$(-5)^1+(-5)^2+(-5)^3+(-5)^4$
73.	$\dfrac{(-18)^5}{9^5}-\dfrac{8^4}{(-4)^4}+\dfrac{10^3}{(-5)^3}$	74.	$\left[(-1)^5\right]^{14}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}-(-2)^{-2}+\left(-\frac{4}{3}\right)^{-1}$
75.	$\dfrac{(-15)^4}{3^4}-\dfrac{21^3}{(-7)^3}+\dfrac{30^2}{(-10)^2}$	76.	$\dfrac{10^2\cdot 10^{-2}\cdot 10^{-3}\cdot 10^{-8}}{10^{-4}\cdot 10^{-6}}$
77.	$\left(\frac{1}{3}\right)^4\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^4\cdot\left(\frac{7}{2}\right)^4$	78.	$\left(-\frac{4{,}2}{58}\right)^{-5}\cdot\left(-\frac{4{,}2}{58}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{-4{,}2}{58}\right)^6$
79.	$\left(\frac{857}{91}\right)^8\cdot\left(\frac{857}{91}\right)^6\cdot\left(\frac{91}{857}\right)^{14}$	80.	$\left(\frac{359}{73}\right)^7\cdot\left(\frac{359}{73}\right)^5\cdot\left(\frac{73}{359}\right)^{12}$
81.	$(-4)^{15}:[(-4)^9\cdot(-4)^{-3}\cdot(-4)^8]$	82.	$\dfrac{10^3\cdot 10^{-3}\cdot 10^{-4}\cdot 10^{-10}}{10^{-5}\cdot 10^{-8}}$
83.	$\dfrac{(-1)^4-(-1)^5-(-1)^7}{-3-(-3)^2-(-3)^3}\cdot\dfrac{(-2)^4-2^3}{(-3)^4-(-3)^3}$	84.	$(-3)^{15}:[(-3)^4\cdot(-3)^9\cdot(-3)]$
85.	$\left(-\frac{7{,}3}{61}\right)^{-7}\cdot\left(-\frac{7{,}3}{61}\right)^{-1}\cdot\left(-\frac{61}{7{,}3}\right)^8$	86.	$-2021^0-(-1)^{2021}$

104. Να γραφτούν οι παρακάτω παραστάσεις με μορφή μιας δύναμης

1.	$3^4\cdot 3^5$	2.	$(-2)^3\cdot(-2)^4$	3.	$4\cdot 4^4\cdot 4^6$
4.	$(-5)\cdot(-5)^3\cdot(-5)^6$	5.	$6\cdot 6^3\cdot 6^8$	6.	$(-3)^4\cdot(-3)^9$
7.	$4^5\cdot 4^7$	8.	$(-4)\cdot(-4)^4\cdot(-4)^7$	9.	$(2^{14}\cdot 2^9\cdot 2):2^{23}$
10.	$\left(-\frac{1}{3}\right)^3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^4\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^5$	11.	$\left(-\frac{1}{4}\right)^3\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^6\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^8$	12.	$\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)$

13.	$(-4)^{15}:[(-4)\cdot(-4)^9\cdot(-4)^3]$	14.	$[(1{,}7)^5\cdot(1{,}7)^6]:[(-1{,}7)^3\cdot(-1{,}7)^5]$
15.	$(3^{15}\cdot 3^6\cdot 3):3^{18}$	16.	$(-2)^{17}:[(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)^8\cdot(-2)^5]$
17.	$[(1{,}3)^7\cdot(-1{,}3)^6]:[(-1{,}3)^4\cdot(-1{,}3)^6]$	18.	$(3^{-2}\cdot 3^{-4})^4:\ 3^{-12}$
19.	$(7^{-3}\cdot 7^{-5})^3\cdot 7^{15}$	20.	$[(-2)^5\cdot(-2)^3]^2:\cdot(-2)^{12}$
21.	$\left[\left(2^{\nu}\right)^{\nu+1}\cdot 4^{\nu}\right]^2$	22.	$\dfrac{2\cdot 3^{\nu}}{3\cdot 2^{\nu}}\cdot\dfrac{3^{1-\nu}\cdot 2^{3\nu}}{2^{1-\nu}\cdot 3^{3\nu}}$

105. Να δείξετε ότι οι αριθμοί $A=\left(-1+\frac{1}{2}\right)^{-3}$ και $B=\frac{3}{4}-\frac{-3}{-4}\cdot\frac{7}{6}$ είναι αντίστροφοι

106. Δίνονται οι αλγεβρικές παραστάσεις : $A = 5^2 - 2^4 : 2^3 + 1 \quad , \quad B = (5^4 - 2^4) : (2^3 + 1)$

1) Να βρείτε τους αριθμούς Α , Β 2) Να συγκρίνετε τους αριθμούς : $\dfrac{A}{20B}$, $\dfrac{22B}{A}$.

107. 1) Να υπολογίσετε τις αλγεβρικές παραστάσεις :

$$A = (-5)^2 - (-2)^{-3} : \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + (-1)^{1000} \quad , \quad B = \left[(-5)^2 - (-2)^{-3} - 1\right] : \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{35}{24}\right]$$

2) Να συγκρίνετε τους αριθμούς : $\dfrac{A}{B}$, $\dfrac{25B}{23A}$.

108. Αν χ , y , α , β , $\gamma \in \mathbf{R} - \{0\}$, να απλοποιηθούν οι παραστάσεις :

1.	$\chi^3 \cdot \chi^4$	2.	$\chi^7 \cdot \chi^{-5}$	3.	$\dfrac{\chi^8}{\chi^5}$	4.	$\dfrac{\chi^2}{\chi^{-3}}$
5.	$\chi^5 : \chi^{-1}$	6.	$\left(\chi^2\right)^3$	7.	$\dfrac{6\chi^5}{3\chi^3}$	8.	$\left(\chi^3\right)^4$
9.	$\dfrac{18\chi^2}{3\chi^{-3}}$	10.	$\dfrac{\chi^3 \cdot \chi^7}{\chi^6}$	11.	$\dfrac{\chi^5 \cdot \chi^{-3}}{\chi^{-1}}$	12.	$\dfrac{\chi^{10} \cdot \chi^{-8}}{\chi^3 \cdot \chi^{-6}}$
13.	$\dfrac{\left(\chi^5\right)^3}{\left(\chi^2\right)^5}$	14.	$\dfrac{\chi^3}{\dfrac{1}{\chi^{-2}}} \cdot \chi$	15.	$\dfrac{\chi^5 \cdot \chi^{-1}}{\chi^3 \cdot \chi}$	16.	$\dfrac{\chi^{-2}}{\chi^{-1}} \cdot \dfrac{\chi^2}{\chi^{-3}}$
17.	$\chi^{-5} \cdot \chi \cdot \chi^6$	18.	$\left(\chi^{-5}\right)^{-2} \cdot \chi^{-7}$	19.	$\left(\chi^{-2}\right)^2 \cdot \left(\chi^2\right)^3$	20.	$\left(\chi^{-2}\right)^{-4} : \chi^7$
21.	$\left(\chi^{-5}\right)^3 \cdot \left(\chi^{-4}\right)^{-6}$	22.	$\dfrac{\left(\chi^{-2}\right)^8}{\left(\chi^3\right)^{-5}}$	23.	$\left(\alpha^2\beta^3\gamma\right)^2$	24.	$\dfrac{\left(\alpha^{-2}\beta\gamma\right)^4}{\alpha^{-2}\beta^{-2}}$
25.	$\left(\alpha^{-1} \cdot \beta^{-3} \cdot \gamma\right)^{-2}$	26.	$\dfrac{15\chi^4 y^{-3}}{3\chi^{-3}y^2}$	27.	$\dfrac{24\left(\alpha^2\beta\right)^2 \gamma^{-2}}{6\alpha^{-1}\beta\gamma^{-1}}$	28.	$\left(-\chi^{-3}\right)^4 \cdot \left(\chi^{-6}\right)^{-3}$
29.	$\left(-\chi^{-4}\right)^5 : \left(-\chi^{-7}\right)^3$	30.	$\dfrac{\alpha^{-3}\beta^4\gamma^2}{\alpha^{-2}\beta^{-1}\gamma}$	31.	$\left(\dfrac{\chi^{10}}{\chi^7}\right)^3 : \left(\dfrac{\chi^{-3}}{\chi^{-1}}\right)^{-7}$	32.	$\dfrac{\left(\chi^{-2}\right)^3}{\left(\chi^4\right)^{-2}} \cdot \alpha^0$
33.	$\dfrac{21 \cdot \alpha^{10}\beta^{-3}}{3 \cdot \alpha^3\beta^4}$	34.	$\dfrac{36 \cdot \alpha^{-5}\beta^2}{9 \cdot \alpha^{-3}\beta^{-6}}$	35.	$\left(\alpha^2\beta\right)^4 \cdot \alpha^{-3}\beta$	36.	$\left(\dfrac{\alpha^4}{\beta^3}\right)^4 \cdot \left(\dfrac{\beta^2}{\alpha^3}\right)^3$
37.	$\left(\dfrac{\alpha^3}{\beta^{-2}}\right)^4 \cdot \left(\dfrac{\chi^5}{\beta^{-3}}\right)^{-2}$	38.	$\left(\dfrac{\alpha^{-3}}{\beta^{-5}}\right)^{-3} : \left(\dfrac{\alpha}{\beta^3}\right)^7$	39.	$\dfrac{\left(\alpha^3\beta^{-2}\right)^4}{\left(\alpha^4\beta^{-6}\right)^2}$	40.	$\left[\dfrac{\left(\chi^5 : \chi^3\right)^4}{\left(\chi^{-9} : \chi^{-11}\right)^3}\right]^{-2}$
41.	$\dfrac{\left(\alpha^{-2}\beta\right)^{-4}}{(\alpha\beta)^3 (\alpha\beta)^{-1}}$	42.	$\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)^{10} \left(-\dfrac{1}{\alpha^4}\right)^{-4} (-\alpha)^6$	43.	$\dfrac{48\left(\alpha^3\right)^2 \beta^9}{12\alpha^5 \left(\beta^2\right)^4}$	44.	$\dfrac{\left(\chi^{-3}\right)^{-2} \left(\chi^{-2}\right)^4}{\left(\chi^3\right)^3 \left(\chi^8\right)^{-1}}$
45.	$\left(\alpha^3 : \beta^2\right)^2 : (\alpha : \beta)^5$	46.	$\left(\alpha^5 : \beta^4\right)^3 : \left(\alpha^4 : \beta^2\right)^4$	47.	$\left(\alpha^3\beta^2\right)^{-3} \cdot \alpha^{10}\beta^8$		
48.	$\left[\left(\dfrac{1}{\alpha^3}\right)^4 \left(\alpha^5\right)^2\right]^{-3} \left(\alpha^4\right)^{-2}$						

109. Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις ως δύναμη του 2 :

1.	$2^4 \cdot 8^3 \cdot 16^2 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3} \left(\dfrac{1}{4}\right)^3$	2.	$0{,}5^4 \cdot 0{,}25^3 \cdot \left(\dfrac{1}{8}\right)^{10}$	3.	$2^{14} - 2^{13}$

110. Να βρεθεί η τιμή των παραστάσεων για $\chi = 2020$, $y = \dfrac{1}{2020}$:

1.	$\left[\left(\chi^3y^2\right)^3\right]^{-2} : \left(\chi^{-1}y\right)^3$	2.	$\left[\left(\chi^2y^{-1}\right)^3 : \left(\chi^{-3}y^6\right)^{-1}\right]^2$
3.	$\left[\left(\chi^3y^4\right)^{-2}\left(\chi^2y^4\right)^3\right] : \left(\chi^2 : y^{-1}\right)^{-4}$	4.	$\chi^4\left(\chi^2y^3\right)^2 : \left(\chi^{-3} : y^2\right)^{-2}$
5.	$\left[\left(\chi^2y^3\right)^{-2}\left(\chi y^3\right)^4\right] : \left(\chi^3 : y^{-1}\right)^{-3}$	6.	$\dfrac{\chi\cdot\left(\chi^3\right)^2\cdot\left(\chi^{-1}\right)^4}{\left(\chi^5\right)^{-3} : \left(\chi^{-4}\right)^5} : \left[\dfrac{\left(\chi^2 : \chi^{-3}\right)^2}{\left(\chi^{-3}\right)^{-3}}\right]^{-2}$
7.	$\left[\left(\chi^3y^{-1}\right)^2\chi^{-5}y^4\left(\chi y^2\right)^{-3}\right]^{-5} : \left(-\dfrac{1}{y^{-5}}\right)^2$		

111. Να υπολογιστεί η τιμή των παραστάσεων :

1. $A = \left(-\dfrac{2}{3}\right)^2 + 2(-1)^{21} - (-3)^{-3} + (-2018)^0 + 14\left(\dfrac{1}{3}\right)^3$ (Απ: 0)

2. $B = -\left\{-(-2)^3 - \left[\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + (-1)^{-4}\right] + (-2)^{-1}\right\} + \left(-\dfrac{5}{2}\right)^2$ (Απ: 0)

3. $\Gamma = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{\chi-4} + \left(-\dfrac{1}{3}\right)^{\chi-3} + \left(-\dfrac{1}{5}\right)^{\chi-2}$ για $\chi = 1$ (Απ: –4)

112. Να κάνετε πράξεις:

1. $\left(-\dfrac{3}{4}\chi^5y^3\omega\right)\left(\dfrac{4}{5}\chi^2y^2\omega^3\right)\left(2\chi^2y\omega\right)$

2. $\left(-5\chi^3y^2\omega^4\right)\left(2\chi y\omega^2\right)\left(-\chi^4y^3\right)$

113. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $2^5\cdot\chi=2^7$ β) $-3^{13}\cdot\chi=3^{15}$ γ) $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^5\cdot\chi = 2^5$ δ) $\dfrac{\chi}{2} = 2^3$

114. Αν κ άρτιος αριθμός, να δείξετε ότι: $1^{\kappa} + (-1)^{\kappa+1} + 1^{\kappa+2} + (-1)^{\kappa+3} = 0$

115. Για ποια τιμή του κ η παράσταση $\alpha^{\kappa+1}\cdot\beta^{2\kappa}$ γράφεται με μορφή δύναμης με βάση (αβ) ;

2.1.3 Ταυτότητες

1. Ταυτότητες

1. $\mathbf{(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2}$	2. $\mathbf{(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2}$
3. $\mathbf{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=\alpha^2-\beta^2}$	4. $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$ $=(\alpha-\beta)^2+2\alpha\beta$
5. $\mathbf{(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3}$	6. $\mathbf{(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3}$
7. $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+\beta^3+3\alpha\beta(\alpha+\beta)$	8. $(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-\beta^3-3\alpha\beta(\alpha-\beta)$
9. $\mathbf{\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)\left(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2\right)}$	10. $\mathbf{\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)\left(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2\right)}$
11. $\mathbf{(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha}$	12. $(\alpha-\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha\beta-2\beta\gamma+2\gamma\alpha$
13. $(\alpha-\beta-\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha\beta+2\beta\gamma-2\gamma\alpha$	14. $(-\alpha-\beta-\gamma)^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2$
15. $\mathbf{(\chi+\alpha)(\chi+\beta)=\chi^2+(\alpha+\beta)\chi+\alpha\beta}$	16. $\mathbf{(\chi-\alpha)(\chi-\beta)=\chi^2-(\alpha+\beta)\chi+\alpha\beta}$
17. $\alpha^\nu-\beta^\nu=(\alpha-\beta)\left(\alpha^{\nu-1}+\alpha^{\nu-2}\beta+\alpha^{\nu-3}\beta^2+\alpha^{\nu-4}\beta^3+...+\alpha\beta^{\nu-2}+\beta^{\nu-1}\right)$	
18. $\alpha^\nu+\beta^\nu=(\alpha+\beta)\left(\alpha^{\nu-1}-\alpha^{\nu-2}\beta+\alpha^{\nu-3}\beta^2-\alpha^{\nu-4}\beta^3+...-\alpha\beta^{\nu-2}+\beta^{\nu-1}\right)$ αν $\nu=2k+1$ (περιττός)	

Προσοχή: $(\alpha+\beta)^\nu\neq\alpha^\nu+\beta^\nu$ για $\nu\neq1$

2. Τρίγωνο Pascal

Το ανάπτυγμα της ταυτότητας $(\alpha+\beta)^\nu$ είναι δύσκολο από την άποψη ότι οι συντελεστές του κάθε όρου υπολογίζονται δύσκολα. Οι συντελεστές των πρώτων αναπτυγμάτων μπορούν να βρεθούν με το τρίγωνο του Pascal ως εξής :

ν=0	**1**								
ν=1	**1**	**1**							
ν=2	**1**	**2**	**1**						
ν=3	**1**	**3**	**3**	**1**					
ν=4	**1**	**4**	**6**	**4**	**1**				
ν=5	**1**	**5**	**10**	**10**	**5**	**1**			
ν=6	**1**	**6**	**15**	**20**	**15**	**6**	**1**		
ν=7	**1**	**7**	**21**	**35**	**35**	**21**	**7**	**1**	
ν=8	**1**	**8**	**28**	**56**	**70**	**56**	**28**	**8**	**1**

το οποίο σχηματίζεται βάζοντας 1 στα άκρα και κάθε όρος σχηματίζεται προσθέτοντας τον ακριβώς από πάνω του και τον προηγούμενο του από πάνω του.

Στην τελευταία γραμμή ($\nu=8$) είναι οι συντελεστές του $(\alpha+\beta)^8$. Υπενθυμίζουμε ότι οι δυνάμεις του α είναι κατιούσες , ενώ του β ανιούσες. Δηλαδή :

$$(\alpha+\beta)^8=1\alpha^8\beta^0+8\alpha^7\beta+28\alpha^6\beta^2+56\alpha^5\beta^3+70\alpha^4\beta^4+56\alpha^3\beta^5+28\alpha^2\beta^6+8\alpha\beta^7+1\alpha^0\beta^8$$

Η μόνη διαφορά με το $(\alpha-\beta)^8$ είναι ότι το πρόσημο του κάθε όρου είναι εναλλάξ θετικό - αρνητικό.

3. Άλλες Ταυτότητες

19. $(\alpha+\beta+\gamma)^3=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$
20. $(\chi+\alpha)(\chi+\beta)(\chi+\gamma)=\chi^3+(\alpha+\beta+\gamma)\chi^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\chi+\alpha\beta\gamma$
21. $(\chi-\alpha)(\chi-\beta)(\chi-\gamma)=\chi^3-(\alpha+\beta+\gamma)\chi^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\chi-\alpha\beta\gamma$
22. Euler: $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\left[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\right]$ $=(\alpha+\beta+\gamma)\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha\right)$
23. $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha=\frac{1}{2}\left[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\right]$
24. Αν $\alpha+\beta+\gamma=0$ ή $\alpha=\beta=\gamma$ τότε $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$
25. $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2-\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2=\alpha\beta$ (Fermat)
26. $\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left(\chi^2+y^2\right)=(\alpha\chi+\beta y)^2+(\alpha y-\beta\chi)^2$ (Lagrange)

Παραδείγματα

1 . Να βρεθούν τα αναπτύγματα των ταυτοτήτων :

1) $(2\chi^3y+3\chi^2y^4)^2$ **2)** $\left(3\chi y+\frac{y^3}{2\chi}\right)^2$ **3)** $(-\omega+2)^2$ **4)** $(-\omega-1)^2$

Λύση :

1) $(2\chi^3y+3\chi^2y^4)^2=(2\chi^3y)^2+2(2\chi^3y)(3\chi^2y^4)+(3\chi^2y^4)^2=$

$=2^2(\chi^3)^2y^2+2\cdot2\cdot3\cdot\chi^3\cdot\chi^2\cdot y\cdot y^4+3^2(\chi^2)^2(y^4)^2=$

$=4\chi^6y^2+12\chi^5y^5+9\chi^4y^8$

2) $\left(3\chi y+\frac{y^3}{2\chi}\right)^2=(3\chi y)^2+2\cdot(3\chi y)\cdot\left(\frac{y^3}{2\chi}\right)+\left(\frac{y^3}{2\chi}\right)^2=9\chi^2y^2+3y^4+\frac{y^6}{4\chi^2}$

3) $(-\omega+2)^2=(2-\omega)^2=4-4\omega+\omega^2$

4) $(-\omega-1)^2=\left[-(\omega+1)\right]^2=(\omega+1)^2=\omega^2+2\omega+1$

2 . Να βρεθούν τα αναπτύγματα των ταυτοτήτων :

1) $\left(8\chi^3y+\frac{\chi^2y^4}{4}\right)\left(8\chi^3y-\frac{\chi^2y^4}{4}\right)$ **2)** $(\omega+2)(2-\omega)$

3) $\left(\frac{2}{7}+\omega\right)\left(\omega-\frac{2}{7}\right)$ **4)** $(-\omega-2)(2-\omega)$

5) $(\kappa-\lambda+\nu)(\kappa+\lambda-\nu)$ **6)** $(\kappa-\lambda-\mu-\nu)(\kappa+\lambda-\mu+\nu)$

Λύση :

1) $\left(8\chi^3y+\frac{\chi^2y^4}{4}\right)\left(8\chi^3y-\frac{\chi^2y^4}{4}\right)=\left(8\chi^3y\right)^2-\left(\frac{\chi^2y^4}{4}\right)^2=8^2\left(\chi^3\right)^2y^2-\frac{\left(\chi^2\right)^2\left(y^4\right)^2}{4^2}=64\chi^6y^2-\frac{\chi^4y^8}{16}$

2) $(\omega+2)(2-\omega)=(2+\omega)(2-\omega)=2^2-\omega^2=4-\omega^2$

3) $\left(\frac{2}{7}+\omega\right)\left(\omega-\frac{2}{7}\right)=\left(\omega+\frac{2}{7}\right)\left(\omega-\frac{2}{7}\right)=\omega^2-\frac{2^2}{7^2}=\omega^2-\frac{4}{49}$

4) $\mathbf{(-\omega-2)(2-\omega)} = \left[-(\omega+2)\right](2-\omega) = -(\omega+2)(2-\omega) = -(2+\omega)(2-\omega) = -(4-\omega^2) = -4+\omega^2$

5) $\mathbf{(\kappa-\lambda+\nu)(\kappa+\lambda-\nu)} = \left[\kappa-(\lambda-\nu)\right]\left[\kappa+(\lambda-\nu)\right] = \kappa^2-(\lambda-\nu)^2 = \kappa^2-(\lambda^2-2\lambda\nu+\nu^2) =$
$= \kappa^2-\lambda^2+2\lambda\nu-\nu^2$

6) $\mathbf{(\kappa-\lambda-\mu-\nu)(\kappa+\lambda-\mu+\nu)} = \left[(\kappa-\mu)-(\lambda+\nu)\right]\left[(\kappa-\mu)+(\lambda+\nu)\right] = (\kappa-\mu)^2-(\lambda+\nu)^2 =$
$= (\kappa^2-2\kappa\mu+\mu^2)-(\lambda^2+2\lambda\nu+\nu^2) = \kappa^2-2\kappa\mu+\mu^2-\lambda^2-2\lambda\nu-\nu^2$

3 . Να βρεθούν τα αναπτύγματα των ταυτοτήτων :

1) $\mathbf{(2\chi^3 y+3\chi^2 y^4)^3}$ **2)** $\mathbf{\left(2\chi y+\dfrac{y^3}{3\chi}\right)^3}$ **3)** $\mathbf{(-\omega+2)^3}$ **4)** $\mathbf{(-\omega-1)^3}$

Λύση :

1) $\mathbf{(2\chi^3 y+3\chi^2 y^4)^3} = (2\chi^3 y)^3+3\left(2\chi^3 y\right)^2(3\chi^2 y^4)+3(2\chi^3 y)\left(3\chi^2 y^4\right)^2+(3\chi^2 y^4)^3 =$
$= 2^3(\chi^3)^3 y^3+3\left(4\chi^6 y^2\right)(3\chi^2 y^4)+3(2\chi^3 y)\left(9\chi^4 y^8\right)+3^3(\chi^2)^3(y^4)^3 =$
$= 8\chi^9 y^3+36\chi^8 y^6+54\chi^7 y^9+27\chi^6 y^{12}$

2) $\mathbf{\left(2\chi y+\dfrac{y^3}{3\chi}\right)^3} = (2\chi y)^3+3\cdot(2\chi y)^2\cdot\left(\dfrac{y^3}{3\chi}\right)+3\cdot(2\chi y)\cdot\left(\dfrac{y^3}{3\chi}\right)^2+\left(\dfrac{y^3}{2\chi}\right)^3 =$
$= 8\chi^3 y^3+3\cdot(4\chi^2 y^2)\cdot\left(\dfrac{y^3}{3\chi}\right)+3\cdot(2\chi y)\cdot\left(\dfrac{y^6}{9\chi^2}\right)+\dfrac{y^9}{8\chi^3} = 8\chi^3 y^3+4\chi y^5+\dfrac{2y^7}{3\chi}+\dfrac{y^9}{8\chi^3}$

3) $\mathbf{(-\omega+2)^3} = (2-\omega)^3 = 2^3-3\cdot2^2\omega+3\cdot2\cdot\omega^2-\omega^3 = 8-12\omega+6\omega^2-\omega^3$

4) $\mathbf{(-\omega-1)^3} = \left[-(\omega+1)\right]^3 = -(\omega+1)^3 = -(\omega^3+3\omega^2+3\omega+1) = -\omega^3-3\omega^2-3\omega-1$

Ασκήσεις

116. Να αντιστοιχίσετε κάθε ταυτότητα της στήλης (Α) με το ανάπτυγμά της στη στήλη (Β).

Στήλη (Α) **ταυτότητα**	**Στήλη (Β)** **ανάπτυγμα**
	1. $(\chi-1)(\chi+1)$
Α. $\left(\chi-\dfrac{1}{\chi}\right)^2$	**2.** $\chi^2-\dfrac{1}{\chi^2}$
	3. $(1-\chi)(1+\chi)$
Β. χ^2-1	**4.** $\chi^2-2+\dfrac{1}{\chi^2}$
Γ. $(1-2\chi)^2$	**5.** $4\chi^2-4\chi+1$
	6. $1-\dfrac{2}{\chi}+\dfrac{1}{\chi^2}$
Δ. $\left(1-\dfrac{1}{\chi}\right)^2$	**7.** $\dfrac{\chi^2-1}{\chi^2}$

Απάντηση :

Α	
Β	
Γ	
Δ	

117. Αν κ περιττός ακέραιος αριθμός, τότε η παράσταση $(\alpha-\beta)^\kappa+(\beta-\alpha)^\kappa$ ισούται με :
Α. $2\alpha^\kappa$ **Β.** $-2\alpha^\kappa$ **Γ.** 0 **Δ.** $\alpha^\kappa+\beta^\kappa$ **Ε.** $2\beta^\kappa$

118. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις αν είναι Σωστή **(Σ)** ή Λάθος **(Λ)**.

1.	Αν $\alpha=\beta$, τότε $\alpha^2+\beta^2=2\alpha\beta$.	**Σ** **Λ**
2.	Για $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$, οι αριθμοί $\alpha-\beta$ και $\beta-\alpha$ είναι αντίθετοι.	**Σ** **Λ**

3.	Αν $\chi \in \mathbf{R} - \{-1\,,\,1\}$ τότε ισχύει η ισότητα: $\dfrac{\chi-1}{\chi^2-1} = \dfrac{1}{\chi+1}$.	**Σ**	**Λ**
4.	$\left(\alpha + \dfrac{1}{\alpha}\right)^2 = \alpha^2 + \dfrac{1}{\alpha^2} + 2$.	**Σ**	**Λ**
5.	$(-\alpha-1)^2 = \alpha^2 + 2\alpha + 1$.	**Σ**	**Λ**
6.	$(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2+\beta^2$.	**Σ**	**Λ**
7.	$\chi^2+y^2 = (\chi+y)(\chi-y)$.	**Σ**	**Λ**
8.	$\chi^2-9 = (\chi-3)(\chi+3)$.	**Σ**	**Λ**
9.	$\left(\chi - \dfrac{1}{y}\right)^2 = \chi^2 - \dfrac{1}{y^2}$.	**Σ**	**Λ**
10.	$(\chi+1)^2 = \chi^2+2\chi+1$.	**Σ**	**Λ**
11.	$(\chi+1)^3 = \chi^3+3\chi^2+3\chi+1$.	**Σ**	**Λ**
12.	$(4\chi^2-9) = (4\chi-3)(4\chi+3)$.	**Σ**	**Λ**
13.	Αν $\alpha+\beta = 5$ τότε $\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta = 25$.	**Σ**	**Λ**
14.	Αν $\alpha-\beta = -1$ τότε $\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta = 1$.	**Σ**	**Λ**
15.	Ισχύει : $(\beta-\alpha)^2 = (\alpha-\beta)^2$	**Σ**	**Λ**
16.	$(-\alpha-\beta)^4 = (\alpha+\beta)^4$.	**Σ**	**Λ**
17.	$(\beta-\alpha)^3 = (\alpha-\beta)^3$.	**Σ**	**Λ**
18.	Αν οι αριθμοί α , $-\beta$ είναι αντίθετοι τότε : $(\beta-\alpha)^5 = 0$.	**Σ**	**Λ**
19.	$(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2+\beta^2 \quad \Rightarrow \quad (\alpha = 0$ ή $\beta = 0)$	**Σ**	**Λ**
20.	$(-\alpha-\beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$.	**Σ**	**Λ**

119. Αν $(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2+\beta^2$ τι συμπέρασμα βγάζετε για τους αριθμούς α και β ;

120. Να υπολογιστεί η παράσταση : $B = \dfrac{5^{\nu+2} - 45\cdot 5^{\nu-1}}{5^{\nu}\cdot 4}$

(Υπόδειξη: Βγάζω κοινό παράγοντα στον αριθμητή το 5^{ν}) (Απ: Β=4)

121. Αν α+β+γ=2 να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης: $A = \alpha - 2\beta - \left[2\alpha - \left(\beta - 3\gamma\right)\right] + 2\gamma$ (Απ: Α=–2)

122. Αν $\chi y = 3$ να βρεθεί η τιμή της παράστασης $B = \chi^2 - \left(y^2 - \chi y\right) + \left[2y^2 + 3\chi y - \left(\chi^2 + y^2\right)\right]$ (Απ: Β=12)

123. Να βρεθούν τα αναπτύγματα των ταυτοτήτων :

1.	$(\mu+\nu)^2$	2.	$(\chi+2)^2$	3.	$(2\chi+3)^2$
4.	$(3\alpha-2\beta)^2$	5.	$(\beta-2)^2$	6.	$(2\alpha-1)^2$
7.	$(2\mu+\nu)^2$	8.	$(\alpha+8)^2$	9.	$(3\chi y+1)^2$
10.	$(5\alpha+3\beta)^2$	11.	$\left(\chi^2-3y\right)^2$	12.	$(-3\chi+2y)^2$
13.	$\left(\alpha^2+\chi^2 y\right)^2$	14.	$(3\chi-7y)^2$	15.	$(15+3\chi)^2$
16.	$\left(3\alpha^2\beta+4\right)^2$	17.	$\left(1+3\alpha^2\beta^2\right)^2$	18.	$\left(4\alpha^3+5\beta\gamma\right)^2$
19.	$\left(3\chi^3-\chi y^2\right)^2$	20.	$(9-5\chi)^2$	21.	$\left(\chi+\dfrac{1}{2}\right)^2$
22.	$\left(\dfrac{\mu}{3}+1\right)^2$	23.	$\left(\alpha^2\beta-\gamma\alpha\right)^2$	24.	$\left(\dfrac{1}{2}-\chi\right)^2$

25.	$\left(3\chi+\frac{1}{2}\right)^2$	26.	$\left(\chi^2+\frac{1}{\chi}\right)^2$	27.	$\left(\frac{5}{4}\chi^3+\frac{1}{5}\chi^2 y\right)^2$
28.	$\left(\chi^2-\frac{1}{2\chi}\right)^2$	29.	$\left(\alpha^3\beta^2-3\alpha\gamma^2\right)^2$	30.	$\left(5\alpha^2\chi+3\alpha\beta\chi^2\right)^2$
31.	$\left(\frac{2\alpha}{3}-\frac{\beta^2}{4}\right)^2$	32.	$\left(2\alpha^3-3\alpha^2\beta\right)^2$	33.	$(5\alpha\chi-8\beta y)^2$
34.	$\left(\frac{5\chi^2}{4}-\frac{y^2}{5}\right)^2$	35.	$\left(\frac{1}{3}\chi y-\frac{3}{2}\omega\right)^2$	36.	$\left(\frac{4}{5}\alpha^2\beta-\frac{5}{2}\alpha\gamma\right)^2$
37.	$\left(\alpha^3-\frac{1}{2}\right)^2$	38.	$\left(\chi^2-y^2\right)^2$	39.	$\left(\alpha^\chi+\beta^y\right)^2$
40.	$\left(-\alpha^3-\alpha\right)^2$	41.	$\left(\alpha^{\chi-1}+2\alpha\beta\right)^2$	42.	$\left(\alpha^{2\chi}+\alpha^\chi\right)^2$

124. Να βρεθούν τα γινόμενα :

1.	$(3\chi+2)(3\chi-2)$	2.	$(\alpha\beta+3)(\alpha\beta-3)$	3.	$\left(\alpha^2\beta-\gamma\right)\left(\alpha^2\beta+\gamma\right)$
4.	$(\chi+y-1)(\chi+y+1)$	5.	$\left(3\alpha-2\beta^3\right)\left(3\alpha+2\beta^3\right)$	6.	$(\chi+y)(y-\chi)$
7.	$(3+\alpha)(\alpha-3)$	8.	$\left(\beta^2-\alpha\right)\left(\alpha+\beta^2\right)$	9.	$(1+2\chi)(2\chi-1)$
10.	$\left(\mu^3-\nu^2\right)\left(\mu^3+\nu^2\right)$	11.	$(5\chi-y)(5\chi+y)$	12.	$(3\alpha\chi+5\beta y)(3\alpha\chi-5\beta y)$
13.	$(1+\alpha\beta)(1-\alpha\beta)$	14.	$(3\chi+2)(2-3\chi)$	15.	$\left(\frac{1}{4}\chi+\frac{3}{5}\right)\left(\frac{1}{4}\chi-\frac{3}{5}\right)$
16.	$\left(\frac{1}{2}\chi y-1\right)\left(\frac{1}{2}\chi y+1\right)$	17.	$\left(1+\frac{3}{5}\alpha\right)\left(1-\frac{3}{5}\alpha\right)$	18.	$\left(\frac{2}{7}\alpha\beta+3\gamma\right)\left(\frac{2}{7}\alpha\beta-3\gamma\right)$
19.	$(1+3\chi)(3\chi-1)$	20.	$(7+3\chi)(3\chi-7)$	21.	$(3-\chi)(\chi+3)$
22.	$(4\chi-1)(1+4\chi)$	23.	$(2\chi+4)(4-2\chi)$	24.	$(\chi^3-2)(2+\chi^3)$
25.	$(1+3\chi^2)(3\chi^2-1)$	26.	$(6\chi^3+5)(5-6\chi^3)$	27.	$(4-\chi^2)(\chi^2+4)$
28.	$(\chi-1)(1+\chi)(\chi^2+1)$	29.	$(1-\chi^2)(\chi^2+1)(\chi^4+1)$	30.	$(1-y)(y+1)(1+y^2)$
31.	$\left(\sqrt{2}-\chi\right)\left(\chi+\sqrt{2}\right)$	32.	$\left(\sqrt{3}+\chi\right)\left(\chi-\sqrt{3}\right)$	33.	$\left(\chi^2+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5}-\chi^2\right)$
34.	$\left(\chi+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}-\chi\right)\left(2+\chi^2\right)$	35.	$\left(\sqrt{2}\chi-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}\chi+\sqrt{3}\right)$	36.	$\left(\frac{\sqrt{2}}{\chi}-1\right)\left(1+\frac{\sqrt{2}}{\chi}\right)\left(1+\frac{2}{\chi^2}\right)$

37.	$(\chi-1)(\chi+1)\left(1+\chi^2\right)$	38.	$(2\alpha+3\beta)\left(4\alpha^2+9\beta^2\right)(2\alpha-3\beta)$
39.	$(\chi-y)(-\chi-y)\left(-\chi^2-y^2\right)$	40.	$(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)$
41.	$(\chi+y+z)(\chi-y-z)$	42.	$(\alpha-\beta+\gamma)(\beta+\gamma-\alpha)$
43.	$\left(\chi^2+\chi+1\right)\left(\chi^2-\chi+1\right)$	44.	$(\chi+y+\alpha+\beta)(\chi+y-\alpha-\beta)$
45.	$(\chi+y+5)(\chi-y+5)$	46.	$(3\alpha+\beta-8)(3\alpha+\beta+8)$
47.	$\left(\chi^2+y^2+\chi y\right)\left(\chi^2+y^2-\chi y\right)$	48.	$\left(\alpha^2+\beta^2+\alpha\sqrt{2}\right)\left(\alpha^2-\alpha\sqrt{2}+\beta^2\right)$
49.	$(\alpha+\beta+\gamma-\delta)(\alpha+\beta-\gamma+\delta)$	50.	$(\alpha-\chi+\beta+y)(\alpha+\chi+\beta-y)$
51.	$(\chi y+1)\left(\chi^2y^2+1\right)(\chi y-1)\left(1+\chi^4y^4\right)$	52.	$\left(\alpha^2+1-\alpha\sqrt{2}\right)\left(\alpha^2+1+\alpha\sqrt{2}\right)$
53.	$(2\chi-y+3z)(2\chi+y-3z)$	54.	$(\chi y+\beta-3\gamma)(\chi y-\beta+3\gamma)$
55.	$(\chi-y)(\chi+y)\left(\chi^2+y^2\right)\left(\chi^4+y^4\right)$	56.	$\left(\chi^2-4y^2\right)\left(\chi^2+4y^2\right)\left(\chi^4+16y^4\right)$

57.	$\left[\alpha+2(\beta+\gamma)\right]\left[\alpha-2(\beta+\gamma)\right]$	58.	$\left[2\chi-3(y+z)\right]\left[2\chi+3(y+z)\right]$
59.	$\left(\chi+1+\chi\sqrt{2}\right)\left(\chi-\chi\sqrt{2}+1\right)$	60.	$\left[5z-2(\chi-y)\right]\left[5z+2(\chi-y)\right]$

125. Να λυθεί η εξίσωση : $(\chi-1)^2+3(\chi+2)(\chi-2)=(2\chi+1)^2$ (Απ: $\chi=-2$)

126. Να βρεθούν τα αναπτύγματα :

1.	$(\alpha+2)^3$	2.	$(2\chi-1)^3$	3.	$(2\alpha^2+3)^3$
4.	$(\mu+\nu)^3$	5.	$(\chi-4)^3$	6.	$(-\alpha+3)^3$
7.	$\left(\chi^2+\dfrac{y}{3}\right)^3$	8.	$\left(2\chi^2y-\chi^3y^2\right)^3$	9.	$\left(-\dfrac{1}{3}\chi-2\right)^3$
10.	$\left(\chi^2-2\chi y\right)^3$	11.	$\left(\chi^2y+3y^3\right)^3$	12.	$(y+5)^3$
13.	$\left(\chi^2-\dfrac{1}{\chi}\right)^3$	14.	$(3\alpha\chi+\beta y)^3$	15.	$\left(-4\omega^3+1\right)^3$
16.	$(-\chi-2)^3$	17.	$\left(\chi^2+\dfrac{1}{3\chi}\right)^3$	18.	$\left(\dfrac{1}{3}\chi^2y-\chi y\right)^3$

127. α) Να αποδείξετε την ταυτότητα : $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$, $\alpha^2+\beta^2=(\alpha-\beta)^2+2\alpha\beta$

β) αν $\chi+\dfrac{2}{\chi}=3$, να βρείτε την τιμή της παράστασης $A=\chi^2+\dfrac{4}{\chi^2}$

γ) αν $y-\dfrac{1}{y}=4$, να βρείτε την τιμή της παράστασης $A=y^2+\dfrac{1}{y^2}$

128. α) Να αποδείξετε τις ταυτότητες : $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

β) αν $2\chi+\dfrac{3}{\chi}=6$, να βρείτε την τιμή της παράστασης $A=8\chi^3+\dfrac{27}{\chi^3}$

129. α) Να αποδείξετε τις ταυτότητες : $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)^3+3\alpha\beta(\alpha-\beta)$

β) αν $\chi-\dfrac{1}{\chi}=2$, να βρείτε την τιμή της παράστασης $A=\chi^3-\dfrac{1}{\chi^3}$

130. Αν ισχύει $\chi+y=\dfrac{7}{2}$ και $\chi y=-\dfrac{3}{2}$, να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων :

α) $A=\chi^2+y^2$ β) $B=(\chi-y)^2$ γ) $\Gamma=\dfrac{1}{\chi^2}+\dfrac{1}{y^2}$ δ) $\Delta=\left(\chi+\dfrac{1}{\chi}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{y}\right)^2$

131. Αν α+β=3 και α·β=2 , να υπολογιστούν οι παραστάσεις :

1. $\alpha^2+\beta^2$ 2. $\alpha^3+\beta^3$ 3. $\alpha^4+\beta^4$ 4. $\alpha^6+\beta^6$

5. $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$ 6. $\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}$ 7. $\dfrac{1}{\alpha^3}+\dfrac{1}{\beta^3}$ 8. $\dfrac{1}{\alpha^4}+\dfrac{1}{\beta^4}$

132. Αν $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}=2$, $\alpha\neq0$, να βρεθεί η τιμή των παραστάσεων :

1. $\alpha^2+\dfrac{1}{\alpha^2}$ 2. $\alpha^3+\dfrac{1}{\alpha^3}$ 3. $\alpha^4+\dfrac{1}{\alpha^4}$ 4. $\alpha^6+\dfrac{1}{\alpha^6}$

133. Να βρείτε ποιων διωνύμων τέλεια τετράγωνα είναι τα τριώνυμα :

1.	$\mu^2+2\mu\nu+\nu^2$	2.	$\chi^2-4\chi+4$	3.	$25\chi^2+10\chi+1$
4.	$9\chi^4+4-12\chi^2$	5.	$\mu^2+16\nu^2-8\mu\nu$	6.	$\alpha^2-6\alpha\beta+9\beta^2$
7.	$\chi^6+y^2-2\chi^3y$	8.	$4\alpha^4+12\alpha^6+9\alpha^8$	9.	$4\chi^2+4\chi+1$
10.	$\chi^2-6\chi+9$	11.	$4\chi^2+20\chi+25$	12.	$4\chi^2-12\chi+9$
13.	$9\chi^2-6\chi+1$	14.	$9\chi^2+12\chi+4$	15.	$\chi^2-8\chi+16$
16.	$\chi^4-10\chi^2+25$	17.	$(\chi-1)^2-4(\chi-1)+4$	18.	$(\alpha+1)^2-6(\alpha+1)+9$

134. Να συμπληρωθούν τα κενά :

1.	$(\chi+.....)^2=.....+4\chi+.....$	2.	$\left(\frac{\chi}{3}-.....\right)^2=.......-.........+9$
3.	$(\chi-.....)^2=.......-..........+9$	4.	$(\chi-......)^2=.....-........+\frac{1}{\chi^2}$
5.	$(.....-.....)^2=\alpha^2-...........+25$	6.	$\chi^2-......=\left(.....-\frac{1}{2}\right)\left(.....+\frac{1}{2}\right)$
7.	$\left(\frac{\chi}{3}-......\right)^2=.......-2\chi+.......$	8.	$(\chi-.....)^2=......-.........+16$
9.	$\alpha^2-......=(.....-5)(......+5)$	10.	$(\chi+.....)^2=......+2\chi+......$
11.	$(.....-.....)^2=\chi^2-6\chi+.....$	12.	$(\alpha+.....)^3=\alpha^3+6\alpha^2+.......+.......$
13.	$(......+.....)^2=\alpha^4+2\alpha^2+.....$	14.	$(.....-.....)^2=\chi^2-2\chi+.....$
15.	$(.......-.....)^2=25\chi^2+1-........$	16.	$(......+......)^2=81\alpha^2+...........+49\beta^2$
17.	$(.....-.....)^2=\mu^2-8\mu+.....$	18.	$(......-......)^2=9\chi^2-..........+4y^2$
19.	$(.....-......)^2=\alpha^2-......+\frac{1}{4}$	20.	$(.....-.......)^2=\alpha^2-\alpha\beta+........$
21.	$(.......+2y^3)^2=49\chi^4+.........+........$	22.	$(......-......)^2=49\alpha^6+\beta^8-.........$
23.	$(......-......)^2=4\chi^2-12\alpha\chi+........$	24.	$(......-......)^2=25y^2-40y\omega+........$
25.	$(.....-.......)^2=1-2\alpha\mu+........$	26.	$(.....-......)^2=\chi^2-\beta\chi+.......$
27.	$\left(.....+\frac{3}{4}y^2\right)^2=\chi^2+..........+.......$	28.	$(.......-.....)^2=4\alpha^2\chi^2-4\alpha\beta\chi+......$
29.	$(......-......)^2=\frac{1}{4}\chi^2-\frac{1}{3}\chi y+.......$	30.	$(........-........)^2=\frac{9}{16}\alpha^2+\frac{1}{9}\beta^2-..........$
31.	$(3\alpha^2-.....)^2=.......-..........+\beta^8$	32.	$(......-.......)^2=16\alpha^2-24\alpha\beta^3+........$
33.	$(......-.......)^2=4\alpha^4-20\alpha^2\beta^5+........$	34.	$(.......-3\beta\gamma^2)^2=........-30\alpha^3\beta\gamma^2+..........$

35.	$(.......-.......)^2=9\chi^6-24\alpha\chi^5+.........$	36.	$(........-........)^2=4\alpha^4\chi^2-12\alpha^3\beta^2\chi^3+.........$
37.	$(4\alpha^3-......)^2=.......-..........+25\beta^2$	38.	$\left(.....-\frac{1}{2}\right)^2=.....-\chi+.....$
39.	$(.......-6y^3)^2=........-3\chi y^3+........$	40.	$(.....-2y)^2=......-4\chi y+.......$
41.	$(.......+.......)^2=4\chi^2+12\chi+........$	42.	$(.......-.......)^2=........-12\chi+9$
43.	$(.......-.......)^2=........-30\alpha+25\alpha^2$	44.	$(.......-.......)^2=........-36\chi^2y^2+81y^4$

135. Να βρεθούν τα αναπτύγματα :

1.	$(2\alpha+3\beta-1)^2$	2.	$(\chi^2-\chi+1)^2$	3.	$(\alpha+\beta-1)^2$
4.	$(\alpha+\beta-2\gamma)^2$	5.	$(2\alpha-3\beta+4\gamma)^2$	6.	$(3\chi^2-4\chi+2)^2$
7.	$(4\alpha-2\beta+1)^2$	8.	$(\alpha-2y+z)^2$	9.	$(5\chi-2y+1)^2$

136. Να γίνουν οι πράξεις :

1.	$(\mu+\nu)^2-(\mu-\nu)^2+(\mu+\nu)(\mu-\nu)-4\mu\nu$	$(\text{Απ: } \mu^2-\nu^2)$
2.	$(\chi+2)^2-(\chi+3)(\chi-3)-2(2\chi-3)$	(Απ: 19)
3.	$(3\alpha+4\beta)(3\alpha-4\beta)-(\beta-5\alpha)(\beta+5\alpha)$	$(\text{Απ: } 34\alpha^2-17\beta^2)$
4.	$(3\chi+y)^2-(2y-5\chi)^2+(4\chi+y)(4\chi-y)$	$(\text{Απ: } 26\chi y-4y^2)$
5.	$3(\alpha-2\chi)^2+2(\alpha-2\chi)(\alpha+2\chi)+(3\chi-\alpha)(3\chi+\alpha)-(2\alpha-3\chi)^2$	$(\text{Απ}: 4\chi^2)$
6.	$(5\chi-2)^2-3(\chi-7)(\chi+7)-4\chi(\chi+3)-2(9\chi^2-16\chi+75)$	(Απ: 1)
7.	$(\chi+2)^2-(\chi-3)^2-2(5\chi-2)$	(Απ: –1)
8.	$(\alpha^\nu-3)^2-(\alpha^\nu-2)^2+2(\alpha^\nu-3)$	(Απ: –1)
9.	$(\chi+1)^2+(\chi-1)^2+(\chi-3)^2+(\chi+3)^2-(\chi+1)(\chi-1)-(\chi-3)(\chi+3)$	$(\text{Απ: } 2\chi^2+30)$
10.	$\left[2\chi^2+(\chi-1)\right]\left[2\chi^2-(\chi-1)\right]+(\chi-3)(\chi+1)-4(\chi^2-1)(\chi^2+1)$	(Απ: 0)
11.	$(2\chi+1)^2-(3\chi+2)^2-(2\chi+5)(2\chi-5)+9\chi^2+8\chi$	(Απ: 22)
12.	$2(\alpha-2\beta)^2-3(\alpha+3\beta)^2-(2\alpha+3\beta)(3\alpha-2\beta)+7\alpha(\alpha+3\beta)+13\beta^2-9\alpha\beta$	(Απ: αβ)
13.	$(\chi+1)^3-2(3\chi+2)^3-\chi(\chi+2)(\chi-2)+5(11\chi^3+21\chi^2+13\chi+3)$	$(\text{Απ: } \chi^3)$
14.	$(2\chi^2+\chi-1)(2\chi^2-\chi+1)+(\chi-3)(\chi+1)-4(\chi-1)(\chi+1)(\chi^2+1)$	(Απ: 0)
15.	$(3\chi+4y)^2-(5y-2\chi)^2-3(\chi-y)^2-2\chi(\chi+25y)$	$(\text{Απ: } -12y^2)$
16.	$(2\chi-y)^3-8\chi(\chi-2y)^2-2\chi y(10\chi+13y)+y^3$	(Απ: 0)
17.	$(\chi+2)^3-\chi(\chi-2)^2+2(\chi-2)(\chi+2)-2\chi(6\chi+4)$	(Απ: 0)
18.	$(\chi^3+\omega^3)^2-(\chi^2+\omega^2)^3+3\chi^2\omega^2(\chi+\omega)^2$	$(\text{Απ: } 8\chi^3\omega^3)$
19.	$4(\alpha+1)^3+(2\alpha-3)^2-(4\alpha-3)(3+4\alpha)-22$	$(\text{Απ: } 4\alpha^3)$
20.	$(\chi-1)^3-2\chi(\chi-1)^2+(\chi-1)(\chi+1)(\chi-2)+\chi^2-1$	(Απ: 0)

21.	$(\alpha-\beta)^3+(\alpha+\beta)^3+3(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)^2+3(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)^2$	$\left(\text{Απ}: 8\alpha^3\right)$

137. Να βρεθούν τα αναπτύγματα :

1.	$(\alpha+1)(\alpha^2-\alpha+1)$	2.	$(\chi+y)(\chi^2-\chi y+y^2)$
3.	$(\alpha-2)(\alpha^2+2\alpha+4)$	4.	$(\chi^2-y)(\chi^4+\chi^2 y+y^2)$
5.	$(2\chi-y^2)(4\chi^2+2\chi y^2+y^4)$	6.	$(\chi+3)(\chi^2-3\chi+9)$
7.	$(\alpha+3)(\alpha^2-3\alpha+9)$	8.	$(3\chi-2)(9\chi^2-6\chi+4)$
9.	$(3\chi^2-2y^3)(9\chi^4+6\chi^2y^3+4y^6)$	10.	$(3\alpha+5)(9\alpha^2-15\alpha+25)$
11.	$(4\chi+3)(16\chi^2-12\chi+9)$	12.	$(2\chi^2-y^5)(4\chi^4+2\chi^2y^5+y^{10})$
13.	$(5\alpha-3)(25\alpha^2+15\alpha+9)$	14.	$(2\alpha^3+3)(4\alpha^6-6\alpha^3+9)$
15.	$(1-y)(1+y+y^2)$	16.	$(4+\chi^2)(16-4\chi^2+\chi^4)$
17.	$(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1)$	18.	$(2\alpha-1)(4\alpha^2+2\alpha+1)$
19.	$(\alpha+2)(\alpha^2-2\alpha+4)$	20.	$(2\alpha+3)(4\alpha^2-6\alpha+9)$

138. Να αποδείξετε τις ταυτότητες της πρώτης στήλης και να υπολογιστούν οι παραστάσεις της δεύτερης στήλης :

1.	$\chi^2-(\chi-2)(\chi+2)=4$	$3{,}12^2-1{,}12\cdot 5{,}12$
2.	$\left(\chi+\frac{1}{\chi}\right)\left(\chi-\frac{1}{\chi}\right)+\frac{1}{\chi^2}=\chi^2$	$\left(4+\frac{1}{4}\right)\left(4-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{16}$
3.	$\left(\chi+\frac{1}{\chi}\right)^2-\left(\chi-\frac{1}{\chi}\right)^2=4$	$\left(2021+\frac{1}{2021}\right)^2-\left(2021-\frac{1}{2021}\right)^2$
4.	$\frac{\alpha^3-\beta^3}{(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta}=\alpha-\beta$	$\frac{109^3-9^3}{128^2-109\cdot 9}$
5.	$\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2-\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2=\alpha\beta$	$\left(\frac{11+3}{2}\right)^2-\left(\frac{11-3}{2}\right)^2$

139. Αν $\chi=\alpha+2$ και $y=\alpha-2$, δείξτε ότι : $2\chi^2-\alpha(\alpha+4)-(y+4)^2=4$.

140. Να αποδειχθεί ότι : $\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left(\chi^2+y^2\right)=(\alpha\chi+\beta y)^2+(\alpha y-\beta\chi)^2$ (Lagrange)

141. Αν $\chi=(\alpha+1)^2$, $y=(\alpha-1)^2$ και $\omega=\chi+8$ να αποδείξετε ότι : $\chi-y+\omega=(\alpha+3)^2$.

142. Αν $\chi^2+5\chi=y$ και $y^2+6y=2021$ να βρείτε την τιμή της παράστασης $A=\chi(\chi+2)(\chi+3)(\chi+5)$.

143. Αν $\alpha^5=2000$ και $\beta^5=20$ να βρείτε την τιμή της παράστασης $A=(\alpha+\beta)(\alpha^4+\alpha^3\beta^2+\alpha^2\beta^3+\beta^4)$.

144. **(Προτεινόμενο Θέμα για εισαγωγή στα Πρότυπα Λύκεια)**
Δίνεται η αλγεβρική παράσταση $A=(\chi-y)(\chi+2y)+(\chi+y)^2+(\chi-2y)^2-5\chi y$. Να αποδείξετε ότι η παραπάνω αλγεβρική παράσταση είναι τέλειο τετράγωνο ενός πολυωνύμου πρώτου βαθμού.

145. Αν $\chi=\alpha+\frac{1}{\alpha}$ και $y=\alpha-\frac{1}{\alpha}$, με $\alpha\neq 0$, δείξτε ότι : α) $\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}=\chi^2-2$ β) $\chi^2=y^2+4$

146. Αν α , β , $\gamma\in\mathbf{R}$ με $\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\neq 0$ και $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=0$ να αποδειχθεί ότι : $(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$

2.1.4 Παραγοντοποίηση

1. Κανόνες Παραγοντοποίησης

1. $\mu\alpha+\mu\beta-\mu\gamma=\mu(\alpha+\beta-\gamma)$
2. $\mu\alpha-\mu\beta-\nu\alpha+\nu\beta=\mu(\alpha-\beta)-\nu(\alpha-\beta)=(\alpha-\beta)(\mu-\nu)$
3. $=\alpha(\mu-\nu)-\beta(\mu-\nu)=(\mu-\nu)(\alpha-\beta)$
4. $\alpha^2-\beta^2=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$
5. $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2$
6. $\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha-\beta)^2$
7. $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)\left(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2\right)$
8. $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)\left(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2\right)$
9. $\chi^2-(\alpha+\beta)\chi+\alpha\beta=(\chi-\alpha)(\chi-\beta)$
10. $\chi^2+(\alpha+\beta)\chi+\alpha\beta=(\chi+\alpha)(\chi+\beta)$
11. $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=\alpha(\chi-\rho_1)(\chi-\rho_2)$

<u>Προσοχή</u> :
Η παραγοντοποίηση είναι η αντίστροφη διαδικασία των Ταυτοτήτων και της Επιμεριστικής ιδιότητας.

2. Επίλυση Τύπων

1) Όταν ένας παράγοντας μιας ισότητας αλλάζει μέλος τότε αλλάζει η **πράξη** (όχι το πρόσημο) (πρόσθεση $\longleftrightarrow$ αφαίρεση , πολλαπλασιασμός $\longleftrightarrow$ διαίρεση) :

Να επιλυθεί ο τύπος : $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}+\kappa$ ως προς α , β , γ , δ , κ.

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}+\kappa \overset{\cdot\beta}{\Leftrightarrow} \frac{\alpha}{\beta}\cdot\beta=\frac{\gamma}{\delta}\cdot\beta+\kappa\cdot\beta \Leftrightarrow \alpha=\frac{\gamma\cdot\beta}{\delta}+\kappa\cdot\beta \Leftrightarrow \alpha=\frac{\gamma\cdot\beta+\kappa\cdot\beta\cdot\delta}{\delta} \quad \text{ή}$$

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}+\kappa \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma+\kappa\delta}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\beta}{\alpha}=\frac{\delta}{\gamma+\kappa\delta} \Leftrightarrow \beta=\frac{\alpha\delta}{\gamma+\kappa\delta} \quad \text{ή}$$

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}+\kappa \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta}-\kappa=\frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha-\kappa\beta}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{(\alpha-\kappa\beta)\delta}{\beta}=\gamma \quad \text{ή}$$

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}+\kappa \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta}-\kappa=\frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha-\kappa\beta}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\beta}{\alpha-\kappa\beta}=\frac{\delta}{\gamma} \Leftrightarrow \frac{\beta\gamma}{\alpha-\kappa\beta}=\delta \quad \text{ή}$$

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}+\kappa \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta}-\frac{\gamma}{\delta}=\kappa \Leftrightarrow \frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\beta\delta}=\kappa$$

2) Ο τύπος που μετατρέπει τους βαθμούς Κελσίου (Celsius) C σε βαθμούς Φαρενάιτ (Fahrenheit) F είναι :

$$\frac{C}{F-32}=\frac{5}{9} \Leftrightarrow 9C=5(F-32) \Leftrightarrow 9C=5F-160 \Leftrightarrow 9C+160=5F \Leftrightarrow \frac{9C+160}{5}=F \Leftrightarrow$$

$$9C-5F=-160 \Leftrightarrow 5F-9C=160 \Leftrightarrow 5F-9C-160=0 \Leftrightarrow 5F-160=9C \Leftrightarrow \frac{5F-160}{9}=C$$

Παραδείγματα

1 . Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις :

1) $\mathbf{12\chi^3 y^2 + 30\chi^2 y^4 - 36\chi^4 y}$ 2) $\mathbf{4\chi(\omega-1) - 2\chi^2(1-\omega)}$

3) $\mathbf{32(3\omega-1)^2 - 72(1-2\omega)^2}$ 4) $\mathbf{1-\mu^2+2\mu\nu-\nu^2}$

5) $\mathbf{\kappa^2 - 6\kappa - \nu^2 + 8\nu - 7}$ 6) $\mathbf{36\left(3\alpha-\beta\right)^2 - 25\left(\alpha-2\beta\right)^2}$

Λύση :

1) $\mathbf{12\chi^3 y^2 + 30\chi^2 y^4 - 36\chi^4 y} = 6\chi^2 y\left(2\chi y + 5y^3 + 6\chi^2\right)$

2) $\mathbf{4\chi(\omega-1) + 2\chi^2(1-\omega)} = 4\chi(\omega-1) - 2\chi^2(\omega-1) = 2\chi(\omega-1)(2-\chi)$

3) $\mathbf{32(3\omega-1)^2 - 72(1-2\omega)^2} = 2\left[16(3\omega-1)^2 - 36(1-2\omega)^2\right] = 2\left\{\left[4(3\omega-1)\right]^2 - \left[6(1-2\omega)\right]^2\right\}$

$$= 2\left[4(3\omega-1) - 6(1-2\omega)\right]\left[4(3\omega-1) + 6(1-2\omega)\right] =$$
$$= 2(12\omega - 4 - 6 + 12\omega)(12\omega - 4 + 6 - 12\omega) = 2(24\omega - 10)\cdot 2 =$$
$$= 2\cdot 2(12\omega-5)\cdot 2 = 8(12\omega-5)$$

4) $\mathbf{1-\mu^2+2\mu\nu-\nu^2} = 1-(\mu^2-2\mu\nu+\nu^2) = 1-(\mu-\nu)^2 = \left[1-(\mu-\nu)\right]\left[1+(\mu-\nu)\right] = (1-\mu+\nu)(1+\mu-\nu)$

5) $\mathbf{\kappa^2 - 6\kappa - \nu^2 + 8\nu - 7} = \kappa^2 - 6\kappa + 9 - \nu^2 + 8\nu - 16 = \kappa^2 - 6\kappa + 9 - (\nu^2 - 8\nu + 16) = (\kappa-3)^2 - (\nu-4)^2 =$

$$= \left[(\kappa-3)-(\nu-4)\right]\left[(\kappa-3)+(\nu-4)\right] = (\kappa - 3 - \nu + 4)(\kappa - 3 + \nu - 4) =$$
$$= (\kappa - \nu + 1)(\kappa + \nu - 7)$$

6) $\mathbf{36\left(3\alpha-\beta\right)^2 - 25\left(\alpha-2\beta\right)^2} = \left[6\left(3\alpha-\beta\right)\right]^2 - \left[5\left(\alpha-2\beta\right)\right]^2 =$

$$= \left[6\left(3\alpha-\beta\right) - 5\left(\alpha-2\beta\right)\right]\cdot\left[6\left(3\alpha-\beta\right) + 5\left(\alpha-2\beta\right)\right] =$$
$$= \left(18\alpha - 6\beta - 5\alpha + 10\beta\right)\left(18\alpha - 6\beta + 5\alpha - 10\beta\right) = (13\alpha + 4\beta)(23\alpha - 16\beta)$$

2 . Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις :

1) $\mathbf{\chi^2 - 8\chi + 7}$ 2) $\mathbf{\chi^2 + 6\chi - 7}$ 3) $\mathbf{3\chi^2 + 3\chi - 6}$

4) $\mathbf{\kappa^2 + 10\kappa\nu - 11\nu^2}$ 5) $\mathbf{\mu^4 + \nu^4 - 11\mu^2\nu^2}$

Λύση :

1) $\mathbf{\chi^2 - 8\chi + 7}$

αναζητώ δύο αριθμούς που έχουν **γινόμενο +7** και **άθροισμα +8** . Είναι οι 1 και 7.

$\chi^2 - 8\chi + 7 = (\chi-7)(\chi-1)$

2) $\mathbf{\chi^2 + 6\chi - 7}$

αναζητώ δύο αριθμούς που έχουν **γινόμενο –7** και **άθροισμα –6** . Είναι οι +1 και –7.

$\chi^2 + 6\chi - 7 = (\chi-1)(\chi+7)$

3) $\mathbf{3\chi^2 + 3\chi - 6} = 3(\chi^2 + \chi - 2)$

αναζητώ δύο αριθμούς που έχουν **γινόμενο –2** και **άθροισμα –1** . Είναι οι –2 και +1.

$3\chi^2 + 3\chi - 6 = 3(\chi^2 + \chi - 2) = 3(\chi+2)(\chi-1)$

4) $\mathbf{\kappa^2 + 10\kappa\nu - 11\nu^2}$

αναζητώ 2 παραστάσεις που έχουν **γινόμενο** $\mathbf{-11\nu^2}$ και **άθροισμα** $\mathbf{-10\nu}$. Είναι οι -11ν και $+\nu$.

$\kappa^2 + 10\kappa\nu - 11\nu^2 = (\kappa + 11\nu)(\kappa - \nu)$

$2^{ος}$ Τρόπος :

Για να γίνει η παράσταση $\kappa^2 + 10\kappa\nu - 11\nu^2$ ανάπτυγμα ταυτότητας αντί για $\mathbf{-11\nu^2}$ θα έπρεπε να έχω $\mathbf{+25\nu^2}$

$\kappa^2 + 10\kappa\nu - 11\nu^2 = \kappa^2 + 10\kappa\nu + 25\nu^2 - 36\nu^2 = (\kappa+5\nu)^2 - 36\nu^2 = (\kappa + 5\nu - 6\nu)(\kappa + 5\nu + 6\nu) =$

$= (\kappa-\nu)(\kappa+11\nu)$

5) $\mathbf{\mu^4 + \nu^4 - 11\mu^2\nu^2}$

Για να γίνει η παράσταση $\mu^4 + \nu^4 - 11\mu^2\nu^2$ ανάπτυγμα ταυτότητας αντί για $\mathbf{-11\mu^2\nu^2}$ θα έπρεπε να έχω $\mathbf{-2\mu^2\nu^2}$

$$\mu^4+\nu^4-11\mu^2\nu^2=\mu^4+\nu^4-2\mu^2\nu^2-9\mu^2\nu^2=(\mu^2-\nu^2)^2-9\mu^2\nu^2=(\mu^2-\nu^2-3\mu\nu)(\mu^2-\nu^2+3\mu\nu)$$

Ασκήσεις

147. Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις :

1.	$2\alpha\beta-2\alpha\gamma$	2.	$6\chi^2+3\chi$	3.	$12\alpha\chi-16\alpha y$
4.	$12\chi^2y+6\chi y^2-3\chi y$	5.	$\alpha\beta^2\gamma^3-\alpha^3\beta^2\gamma$	6.	$5\alpha^2\chi-10\alpha\chi y+20\alpha\chi\omega$
7.	$\alpha\chi+\beta\chi-\gamma\chi$	8.	$12\alpha\chi^3+3\alpha\chi^2y-9\alpha\chi y^2$	9.	$3\mu\chi^2y-12\nu\chi y^2+21\mu\nu\chi y$
10.	$4\alpha^3+10\alpha^2-2\alpha$	11.	$9\mu^2\nu^2-27\mu\nu+63$	12.	$15\alpha^3\beta^2\gamma-5\alpha^2\beta^3\gamma^2-20\alpha^4\beta^4\gamma^3\chi$
13.	$\alpha^2\beta\gamma-\alpha\beta^2\gamma+\alpha\beta\gamma^2$	14.	$12\alpha^2\beta+6\alpha^3\beta^2-18\alpha^2\beta^4$	15.	$\alpha(\chi+y)-\beta(\chi+y)$
16.	$\chi(2\alpha-\beta)+y(\beta-2\alpha)$	17.	$(\alpha+\beta)\chi+(\alpha+\beta)y$	18.	$\alpha\beta(\chi y-\omega)+(\chi y-\omega)$
19.	$(\beta-\gamma)\omega-(\beta-\gamma)\omega$	20.	$\chi(2\alpha+\beta)-15(2\alpha+\beta)$	21.	$\alpha(3\chi y+\omega)-\beta(3\chi y+\omega)$
22.	$\alpha(\chi-1)-\chi+1$	23.	$\alpha(\chi-y)-(y-\chi)$	24.	$(\alpha+\beta)(\chi-3y)-2\alpha(\chi-3y)$
25.	$(\chi^2-y^2)+\alpha(\chi^2-y^2)$	26.	$\alpha^2(\chi-1)(\alpha+\beta)+\alpha^2(1-\chi)$	27.	$(3\chi-1)(y+2)-(1-3\chi)(y-2)$
28.	$\alpha(\chi-y)^2-\beta(\chi-y)$	29.	$(\chi+y)^2-(\chi+y)^2$	30.	$(5\alpha-1)(\beta+3)-(1-5\alpha)(\beta-3)$

31.	$(\alpha-\beta)(2\alpha-\beta+\gamma)+(\beta-\alpha)(\alpha-\beta+\gamma)$	32.	$(\chi-2y)(\alpha-\beta)-(\alpha+\beta)(2y-\chi)$
33.	$(2\chi+y)-\alpha(2\chi+y)-(2\chi+y)^2$	34.	$(2\chi+1)(3\chi-2)-(\chi-4)(2\chi+1)-(2\chi+1)^2$
35.	$(3\chi-2)(\chi-3)+4(3-\chi)$	36.	$(2\alpha-1)(\alpha-4)+(4-\alpha)(3-5\alpha)$
37.	$(\chi-3y)(\chi+2y)-\chi-2y$	38.	$(\alpha+3)(\chi-\omega)-2(\omega-\chi)+(\chi-\omega)(5-3\alpha)$

148. Να αναλυθούν σε γινόμενα παραγόντων τα πολυώνυμα:

1.	$\alpha\chi+\alpha y+3\chi+3y$	2.	$\chi^2+\chi y-\chi-y$	3.	$\chi^3+\chi^2+\chi+1$
4.	$3\alpha^3-6\alpha^2+5\alpha-10$	5.	$2\chi^4-2\chi^3+3\chi-3$	6.	$\alpha^3-\alpha^2\beta-\alpha\beta^2+\beta^3$
7.	$6\chi^2+\chi y+18\chi\omega+3y\omega$	8.	$8\chi y^3-24y^2-7\alpha\chi y+21\alpha$	9.	$\chi^3-5\chi^2+2\chi-10$
10.	$5\alpha\chi-4\beta\chi+5\alpha y-4\beta y$	11.	$\chi^3+7\chi^2+3\chi+21$	12.	$\alpha^2-4\alpha+\alpha\gamma-4\gamma$
13.	$4\alpha y-2\beta y+2\alpha\omega-\beta\omega$	14.	$\alpha^2\gamma^2-\alpha\gamma\delta+\alpha\beta\gamma-\beta\delta$	15.	$\alpha\chi^2-\alpha^2\chi-\alpha+\chi$
16.	$11\alpha^3+55\alpha^2+6\alpha+30$	17.	$4\chi-4y+\alpha y-\alpha\chi$	18.	$\chi^2+y\omega-\chi y-\chi\omega$
19.	$\beta\gamma-\alpha^2+\alpha\gamma-\alpha\beta$	20.	$\chi^3-15+5\chi^2-3\chi$	21.	$\chi y^2+\chi-1-y^2$
22.	$\alpha\chi-\beta y-\alpha y+\beta\chi$	23.	$3\chi-6y+2\chi y-\chi^2$	24.	$\chi^3-\chi^2y+\chi y^2-y^3$

149. Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις :

1.	χ^2-9	2.	ω^2-1	3.	$-25\chi^2+4$
4.	$\alpha^2\beta^2-\gamma^2$	5.	$81\alpha^2-49\beta^2$	6.	$16\alpha^2-\chi^2y^2$
7.	$4\alpha^4-9\beta^2$	8.	$25\alpha^2\chi^4-9\beta^2$	9.	$25-\chi^2$
10.	χ^4-y^4	11.	$4\alpha^2\beta^2-9\chi^2y^2$	12.	$4\chi^2-9\omega^2$
13.	$9\beta^2-\gamma^4$	14.	$\alpha^2\beta^2-49\gamma^4$	15.	$1-\frac{1}{4}\chi^2$
16.	$\frac{1}{4}\chi^2-\frac{1}{25}y^2$	17.	$\frac{1}{81}\alpha^4-\frac{16}{625}$	18.	$\frac{4}{9}\chi^2y^2-1$
19.	$(\alpha+\beta)^2-\gamma^2$	20.	$1-(3\chi-y)^2$	21.	$(\chi-y)^2-1$
22.	$(\alpha-2\beta)^2-4\beta^2$	23.	$(\alpha+\beta)^2-(\alpha-\beta)^2$	24.	$(4\chi+2y)^2-(2\chi-3y)^2$
25.	$\alpha\chi^3-\alpha\chi$	26.	$3\alpha^3\beta-27\alpha\beta^3$	27.	$5\chi^5y-20\chi y^3$
28.	$\chi^{\mu+2}-\chi^{\mu}$	29.	$(\chi-y)-(\alpha+\beta)^2(\chi-y)$	30.	$(\alpha^2-12)^2-16$

31.	$\chi^5y^4-\chi$	32.	$3\chi^2-12y^2$	33.	$(5\alpha^2+2\alpha-3)^2-(\alpha^2-2\alpha-3)^2$
34.	$243-3\beta^4$	35.	$13\alpha^5y-117\alpha y^3$	36.	$5\alpha^3-5\alpha\chi^2$
37.	$3\chi^4-27\beta^2$	38.	$8\alpha^2\beta^2-50\alpha^4\gamma^2$	39.	$15\chi^2-60$
40.	$2\alpha\chi^4-162\alpha y^4$	41.	$75\chi^2-48\omega^2$	42.	$\alpha\chi^4-25\alpha$
43.	$45\chi^2y^4-80\omega^2$	44.	$27\alpha^3\beta-12\alpha\beta^5$	45.	$\alpha^2-(2\beta-\gamma)^2$
46.	$(\chi-y)^2-4\alpha^2$	47.	$9-(\chi+y)^2$	48.	$100-(3\alpha-\beta)^2$
49.	$(2\alpha+\beta)^2-(2\alpha-\beta)^2$	50.	$(3\chi+y)^2-25$	51.	$(5\mu+\nu)^2-(\mu-3\nu)^2$
52.	$(3\chi+5y)^2-(2\chi-y)^2$	53.	$(\alpha+1)^2-(\alpha-1)^2$	54.	$(3\chi-y)^2-(\chi+5y)^2$
55.	$9(\alpha+\beta)^2-4(\alpha-\beta)^2$	56.	$25(\chi+y)^2-16(\chi-y)^2$	57.	$3(\alpha-2\beta)^2-27(\alpha+\beta)^2$
58.	$5(\chi+y)^2-20(2\chi-y)^2$	59.	$28(\alpha+3\beta)^2-7(\beta-2\alpha)^2$	60.	$(2\alpha+\beta+5\gamma)^2-(\alpha+\beta-\gamma)^2$
61.	$\alpha^2\chi-\alpha^2y+y-\chi$	62.	$\chi^2y^2-9y^2-\chi^2+9$	63.	χ^8-y^8
64.	$\alpha^{2\mu+1}-\alpha\beta^2$	65.	$\alpha^5-1+\alpha^4-\alpha$	66.	$\alpha\chi^2-\alpha y^2+\beta\chi^2-\beta y^2$
67.	$\chi^{5\nu}-9\chi^{3\nu}y^{4\nu}$	68.	$\chi y^2+1-y^2-\chi$	69.	$(\chi^2+1)^2-4\chi^2$
70.	$(\alpha^2+\beta^2)^2-4\alpha^2\beta^2$	71.	$(\chi^2+y^2-z^2)^2-4\chi^2y^2$	72.	$(\chi+y)(2\alpha-\beta)+(\chi^2-y^2)$

73.	$(\alpha^2-\beta^2)-(\alpha-\beta)(2\alpha+\beta)$	74.	$(2\chi-y)(\alpha+\beta)^2-(2\chi-y)$
75.	$(\alpha+1)(\alpha-2)-(\alpha^2-4)$	76.	$(\alpha+1)(2-\alpha)+(\alpha-2)^2+(\alpha^2-4)$
77.	$(\alpha-10)(\alpha+2)^2-16(\alpha-10)$	78.	$(\chi+5)^2(\chi-2)-(\chi^2-4)(\chi+5)$
79.	$(2\chi-1)^2-2\chi(2\chi-1)+4\chi^2-1$	80.	$(3\chi-2)^2-25$
81.	$(\chi-3y)^3-4\chi+12y$		

150. Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις :

1.	$\mu^2+2\mu\nu+\nu^2$	2.	$\alpha^2+4\alpha\beta+4\beta^2$	3.	$9\chi^2+6\chi y+y^2$
4.	$\chi^2+2\chi+1$	5.	$\chi^2+12\chi+36$	6.	$\chi^2-4\chi+4$
7.	$-\alpha^2-2\alpha-1$	8.	$-\alpha^2+4\alpha-4$	9.	$\chi^2-14\chi+49$
8.	$\chi^2-12\chi+36$	11.	$\chi^4-4\chi^2+4$	12.	$\chi^4-2\chi^2y^3+y^6$
11.	$9\alpha^4\beta^2-6\alpha^3\beta\gamma+\alpha^2\gamma^2$	14.	$\frac{1}{4}\chi^2+\frac{1}{9}y^2+\frac{1}{3}\chi y$	15.	$(\alpha+\beta)^2-2(\alpha+\beta)+1$
14.	$\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2-\gamma^2$	17.	$y^2+2\chi-\chi^2-1$	18.	$\chi^2-y^2-2\alpha y-\alpha^2$
17.	$\chi^4-\chi^2-4\chi-4$	20.	$\alpha^4+2\alpha^2\beta+\beta^2-81$	21.	$(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)^2-4\alpha^2\beta^2$
20.	$y^2-\chi^2-1-2\chi$	23.	$9(\chi+y)^2-6y(\chi+y)+y^2$	24.	$\chi^2-2\chi+1-\alpha^2-2\alpha\beta-\beta^2$
23.	$4\chi^2-4\chi+1-\chi^2+6\chi-9$	26.	$2\chi^2-4\chi+2$	27.	$3\chi^2-12\chi y+12y^2$
26.	$\chi^2-4\chi^3+4\chi^4$	29.	$36\chi^4+12\chi^2+1$	30.	$\frac{1}{4}\chi^4+\frac{3}{5}\chi^2+\frac{9}{25}$
29.	$\frac{\chi^4}{25y^2}+1+\frac{25y^2}{4\chi^4}$	32.	$(\chi^2+1)^2-4\chi^2$	33.	$(\alpha^2+\beta^2)^2-4\alpha^2\beta^2$
34.	$(\alpha^2+1-\beta^2)^2-4\alpha^2$	35.	$4\alpha^2-12\alpha\beta+9\beta^2$	36.	$2\chi^8-4\chi^4y^3+2y^6$
37.	$(\chi-1)^2+2(\chi-1)+1$	38.	$4\alpha^2\omega^2-4\alpha\beta\omega+\beta^2$	39.	$(2\chi-1)^2+2(2\chi-1)+1$
40.	$25\alpha^2\beta^2-20\alpha\beta+4$	41.	$\frac{\chi y}{3}+\frac{y^2}{9}+\frac{\chi^2}{4}$		

151. Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις :

1.	α^3-8	2.	$8\chi^3+27$	3.	$24\chi^3-3$

4.	$1-64\chi^3$	5.	$\alpha^3-(\beta-\gamma)^3$	6.	$\alpha^4\beta-\alpha\beta^4$
7.	$\alpha^6-\beta^6$	8.	$-3\chi^6+3$	9.	$\alpha^7-\alpha$
10.	χ^3+64	11.	$\chi^3-y^3\omega^3$	12.	$1-125\alpha^3$
13.	$1000\omega^3-1$	14.	$\alpha^3\beta-\beta\gamma^3$	15.	$\alpha\beta^3-27\alpha$
16.	$\alpha\chi^3+8\alpha y^3$	17.	χ^3+125	18.	$(\alpha+\beta)^3+(\alpha-\beta)^3$
19.	$27\chi^3y-\alpha^3y\beta^3$	20.	$(\alpha+\beta)^3-(\alpha-\beta)^3$	21.	$\alpha^3\chi^3-\beta^3\chi^3+\alpha^3-\beta^3$
22.	$\alpha^3+\beta^3+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$	23.	$(\alpha^3-1)-2(\alpha^2-1)-(\alpha-1)^2$	24.	$\alpha^3+3\alpha^2+3\alpha+2$
25.	$\chi^5-\chi^3-\chi^2+1$	26.	$(\chi-1)^3(\chi^2-4)-(\chi^2-4)(\chi^3-1)$	27.	$\chi^6-(2\chi+1)^3$
28.	$\alpha^3\beta^3-\alpha^3-\beta^3+1$	29.	$\alpha^4+3\alpha^3+\alpha+3$	30.	$\alpha(\alpha^2-1)-\beta(\beta^2-1)$
31.	$2\chi^3-128$	32.	$(\chi+1)^3-8$	33.	χ^9-512y^9

152. Να αναλυθούν σε γινόμενα παραγόντων τα τριώνυμα :

1.	$\chi^2-4\chi+3$	2.	$\chi^2-3\chi-10$	3.	$\chi^2-\chi-12$
4.	$\chi^2-8\chi+12$	5.	$\chi^2-3\chi y-4y^2$	6.	$\chi^2+5\chi+4$
7.	$\chi^2-2\chi-8$	8.	$\chi^2+8\chi+12$	9.	$\chi^2+10\chi+24$
10.	$\chi^2-7\chi+10$	11.	$\chi^2-11\chi+18$	12.	$\chi^2-\chi-6$
13.	$\chi^2-\chi-2$	14.	$\chi^2-\chi-42$	15.	$2\chi^2-10\chi+12$
16.	$3\chi^2-9\chi+6$	17.	$\chi^2+5\chi-36$	18.	$\chi^2-4\chi-12$
19.	$\chi^2-20\chi+36$	20.	$\chi^2-12\chi+35$	21.	$2\chi^2-4\chi-6$
22.	$\chi^2-3\chi y+2y^2$	23.	$\chi^2-5\chi y+4y^2$	24.	$\alpha^2+9\alpha\beta+8\beta^2$
25.	$\chi^2+16\chi-36$	26.	$\chi^2-7\chi-18$	27.	$\chi^2-13\chi+12$
28.	$\chi^2-4\chi-12$	29.	$\chi^2+4\chi y-21y^2$	30.	$3\alpha^2-9\alpha\beta-30\beta^2$
31.	$\chi^4-10\chi^2+9$	32.	$\chi^4-5\chi^2+4$	33.	$\chi^4-\chi^2-2$
34.	$(\alpha-\beta)^2-12(\alpha-\beta)+27$	35.	$(\alpha+\beta)^2-2(\alpha+\beta)-24$	36.	$\alpha^4-3\alpha^2\beta-18\alpha^2\beta^2$

153. Να αναλυθούν σε γινόμενο παραγόντων τα πολυώνυμα:

1.	$\chi^4+3\chi^2y^2+4y^4$	2.	$\chi^4+\chi^2y^2+y^4$	3.	$16\alpha^4+4\alpha^2\beta^2+\beta^4$
4.	$\mu^4+5\mu^2v^2+9v^4$	5.	$16\chi^4+25y^4+36\chi^2y^2$	6.	$4\chi^4+16\chi^2y^2+25y^4$
7.	$9\alpha^4+26\alpha^2\beta^2+25\beta^4$	8.	$\chi^4+\chi^2+1$	9.	$16\alpha^4+4\alpha^2\beta^2+\beta^4$
10.	$4\chi^4-21\chi^2y^2+9y^4$	11.	$\chi^4+y^4-11\chi^2y^2$	12.	$4\chi^4-37\chi^2y^2+9y^4$
13.	$16\alpha^4-17\alpha^2+1$	14.	$9\chi^4-15\chi^2+1$	15.	$\chi^4+y^4-7\chi^2y^2$
16.	$25\chi^4+y^4-11\chi^2y^2$	17.	$\alpha^3+2\alpha^2-1$	18.	$\chi^3-3\alpha^2\chi+2\alpha^3$
19.	$\alpha^4+4\beta^4-13\alpha^2\beta^2$	20.	$\alpha^2-\alpha\beta-\beta-1$	21.	$\alpha^4+\alpha^3-\alpha^2-\alpha$
22.	$\chi^7+8\chi^4-\chi^3-8$	23.	$\chi^2+y^2-4\chi+4y-2\chi y+3$	24.	$\chi^3+3\chi^2-4$
25.	$\alpha^4+\alpha^2+1$	26.	$\alpha^8+\alpha^4+1$	27.	α^4+4

154. Να γίνουν γινόμενα οι παραστάσεις :

1.	$\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2-1$	2.	$1-\alpha^2+2\alpha\beta-\beta^2$
3.	$\chi^2-2\chi+1-\alpha^2-4\alpha\beta-4\beta^2$	4.	$\chi^4+y^4-z^4-\alpha^4+2\chi^2y^2-2\alpha^2z^2$
5.	$250\alpha^3+2$	6.	$81+3\chi^3$
7.	$\chi^3-2\chi^2-\chi+2$	8.	$32\chi^4-32\chi^2+16\chi-2$
9.	$\chi-2\sqrt{\chi}+1$	10.	$(\omega^2-4)^2+(3\omega-10)(\omega+2)^2$

11.	$\alpha^4+4\beta^4$ (Sophie Germain)	12.	$4\chi^4+1$
13.	$\alpha^2-(2\beta+1)\alpha+\beta+\beta^2$	14.	$4\chi^2-(\chi^2-y^2+1)^2$
15.	$\chi^2+\sqrt{12}\cdot\chi+3$		

155. Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις :

1.	$47\cdot35+47\cdot65$	2.	$79\cdot132-79\cdot32$	3.	$58\cdot61+58\cdot47-8\cdot58$
4.	$77\cdot33+77\cdot68-77$	5.	65^2-35^2	6.	102^2-98^2
7.	100^2-99^2	8.	98^2-4	9.	$2\cdot99^2-2$
10.	$5\cdot63^2-5\cdot61^2$	11.	$3\cdot97^2-27$	12.	$25^2-24^2-93^2$
13.	$79^2+2\cdot79+1$	14.	$91^2-2\cdot91+1$	15.	$125^2-2\cdot125\cdot95+95^2$
16.	$32^2-24\cdot32+12^2$	17.	$\dfrac{43^2-11^2}{36{,}5^2-27{,}5^2}$	18.	$\dfrac{53^3+27^3}{80}+3\cdot53\cdot27$
19.	$\dfrac{37^2-23^2}{22^2-8^2}$	20.	$\dfrac{63^2-21^2}{24^2+2\cdot18\cdot24+18^2}$	21.	$\dfrac{3+6+9+...+300}{2+4+6+...+200}$

156. Αν $A=\dfrac{\chi^5+2\chi^4+4\chi^3+2\chi^2+4\chi+8}{\chi^2+2\chi+4}$ και $B=\dfrac{\chi^5-2\chi^4+4\chi^3-2\chi^2+4\chi-8}{\chi^2-2\chi+4}$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις : α) A^2+B^2 και β) $A\cdot B$ $\left(\text{Απ: α) } 2\chi^6+8 \quad \text{β)}\chi^6-4\right)$

157. Αν $\alpha=\dfrac{1}{2019}$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\dfrac{\alpha^2+\alpha+\alpha}{\alpha^4-\alpha}:\dfrac{\alpha}{\alpha-1}$.

158. Αν $A=\dfrac{(\chi+2)(\chi-2)^2-81(\chi+2)}{\chi^2-4\chi-77}$ και $B=\left(\dfrac{\chi^2-5\chi+6}{\chi^2-16}\cdot\dfrac{\chi^2+5\chi+4}{\chi^2-4}\right):\dfrac{\chi-3}{\chi-4}$ να αποδείξετε ότι $A\cdot B=\chi+1$

159. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις :

1.	$\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{6\alpha^2+6\beta^2}\cdot\dfrac{3\alpha^2+3\beta^2}{\alpha^2-\alpha\beta}$	2.	$\dfrac{(\chi^2-4)^2-(\chi+2)^2}{\chi^2-4\chi+3}$
3.	$\left(\dfrac{3\chi+2}{3\chi}:\dfrac{9\chi^2-4}{2\chi}\right)\dfrac{3\chi-2}{8}$	4.	$\left(\dfrac{4+2\chi+2y+\chi y}{4-2\chi-2y+\chi y}:\dfrac{4-2\chi+2y-\chi y}{4+2\chi-2y-\chi y}\right):\dfrac{(\chi+2)^2}{(\chi-2)^2}$
5.	$\dfrac{(\chi^2-9)^2-(\chi+5)(\chi-3)^2}{\chi(\chi-6)(\chi+4)+9\chi+36}$	6.	$\dfrac{\dfrac{\chi^3+\chi^2+\chi+1}{\chi-1}}{\dfrac{\chi^2+1}{\chi^3+\chi^2-\chi-1}}$
7.	$\dfrac{4\alpha^2-\alpha\beta}{3\beta}\cdot\dfrac{\alpha}{12\alpha\beta-3\beta^2}\cdot\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}$	8.	$\left(\dfrac{\alpha^3+2\alpha^2-\alpha-2}{\alpha-1}:\dfrac{\alpha^2+3\alpha+2}{\alpha^2+\alpha}\right):\dfrac{\alpha+1}{\alpha}$
9.	$\dfrac{\omega^4-81}{\omega^3+3\omega^2+9\omega+27}$	10.	$\dfrac{1+\chi^{-1}+\chi^{-2}}{\chi^{-3}\left[1+\left(\dfrac{1}{\chi}\right)^{-1}+\left(\dfrac{1}{\chi}\right)^{-2}\right]}$

Απαντήσεις :

1.	$\dfrac{\alpha+\beta}{2\alpha}$	2.	$(\chi+2)^2$	3.	1/12	4.	1	5.	χ+1
6.	$(\chi+1)^3$	7.	1/9	8.	α^2	9.	ω–3	10.	χ

160. Να γίνουν οι πράξεις :

1.	$\frac{3\chi+2}{\chi^2-\chi}+\frac{2\chi+1}{\chi^2+\chi}-\frac{6\chi+4}{\chi^2-1}$	2.	$\left(\frac{\chi+2y}{\chi+y}+\frac{\chi}{y}\right):\left(\frac{\chi+2y}{y}-\frac{\chi}{\chi+y}\right)$
3.	$\frac{1}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\frac{1}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}+\frac{1}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$	4.	$\frac{\chi-y}{\chi y}+\frac{\omega-\chi}{\omega\chi}+\frac{y-\omega}{y\omega}$
5.	$\left(\frac{2\chi}{\chi+y}+\frac{y}{\chi-y}-\frac{y^2}{\chi^2-y^2}\right):\left(\frac{1}{\chi+y}+\frac{\chi}{\chi^2-y^2}\right)$	6.	$(\chi+1):\left(1+\frac{1}{\chi}\right)\cdot\frac{\alpha^2\chi+\beta\chi}{\beta+\alpha^2}$
7.	$\left[\frac{(\chi-y)^2}{2\chi y}+2\right]:\frac{\chi^2+2\chi y+y^2}{4\chi y}$	8.	$\left[\frac{5}{\alpha+3}-\frac{2}{3-\alpha}+\frac{6(1-\alpha)}{\alpha^2-9}\right]:\frac{2}{\alpha+3}$
9.	$\left(\frac{1}{\chi+1}+\frac{1}{\chi-1}+\frac{3\chi}{1-\chi^2}\right):\frac{\chi}{1-\chi^2}$	10.	$\left(\frac{1}{2\chi-6}-\frac{3}{\chi+3}-\frac{25-7\chi}{3\chi^2-27}\right):\frac{\chi-13}{2\chi^2-18}$
11.	$\left(\frac{\alpha-3\beta}{\alpha^2-\beta^2}+\frac{3}{\alpha+\beta}-\frac{1}{\beta-\alpha}\right):\frac{10}{\alpha+\beta}$	12.	$\left(\frac{3}{2\chi-4}-\frac{1}{\chi+2}-\frac{2\chi+5}{2\chi^2-8}\right):\frac{\chi-5}{3\chi^2-12}$
13.	$\left(\frac{2\chi y}{\chi+y}-y\right):\left(\frac{1}{\chi}+\frac{1}{y-2\chi}\right)+\left(\frac{2\chi y}{\chi+y}-\chi\right):\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{\chi-2y}\right)$		

Απαντήσεις :

1.	$-1/\chi$	2.	1	3.	0	4.	0	5.	χ
6.	χ^2	7.	2	8.	1/2	9.	1	10.	–1/3
11.	1/2	12.	–3/2	13.	χy				

161. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις :

1.	$\dfrac{\frac{1}{\chi-3}-\frac{1}{\chi+3}}{\frac{2}{\chi^2-9}}$	2.	$\dfrac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1-\chi}}}$	3.	$\dfrac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{\beta^2}}}$
4.	$\dfrac{\frac{\chi^4-2\chi^3+\chi^2-2\chi}{\chi^3+\chi}+2}{\left[\left(\chi-\frac{1}{\chi}\right):\frac{\chi-1}{\chi}\right]:(\chi+1)}$	5.	$\dfrac{\frac{\chi}{\chi-2}+\frac{\chi}{\chi+2}}{\chi-\frac{4\chi}{\chi^2-4}}$	6.	$\left(\frac{\alpha^3-2\alpha^2\beta}{\alpha^3+\beta^3}-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)\cdot\left(\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\alpha-\beta}{\alpha}\right)$
7.	$\dfrac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha^2-\beta^2+\frac{2\beta^2}{1+\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}}}$	8.	$\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{4}{\chi^3}}{\frac{1}{\chi^2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2\chi}}$	9.	$\dfrac{9\chi^2-4\alpha^2}{\frac{\chi-\alpha}{\alpha-2\chi}-1}$
10.	$\left(\alpha-\frac{4\alpha\beta}{\alpha+\beta}+\beta\right)\ :\ \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}-\frac{\beta}{\beta-\alpha}-\frac{2\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}\right)$	11.	$\dfrac{1+\chi^{-1}+\chi^{-2}}{1-\chi^{-3}}$		

Απαντήσεις :

1.	3	2.	$\frac{\chi-2}{2\chi-3}$	3.	$1-\beta^2$	4.	χ
5.	$2/\chi$	6.	–1	7.	α	8.	$\frac{2(\chi-2)}{\chi}$
9.	$\frac{3\chi+2\alpha}{\alpha-2\chi}$	10.	$\alpha-\beta$	11.	$\frac{\chi}{\chi-1}$		

162. Να βρείτε σε μονάδες του S. I. το ζητούμενο μέγεθος :

	Τύπος				Ζητούμενο
1.	$d=\frac{m}{V}$	$m=0,2\ kg$	$V=100\ cm^3$		d σε g/cm^3
2.	$d=\frac{m}{V}$	$d=0,9\ g/cm^3$	$m=18\ kg$		V
3.	$d=\frac{m}{V}$	$d=2,1\ g/cm^3$	$V=100\ cm^3$		m
4.	$\upsilon=\frac{\Delta\chi}{\Delta t}$	$\Delta\chi=108\ km$	$\Delta t=1\ h$		υ
5.	$\upsilon=\frac{\Delta\chi}{\Delta t}$	$\upsilon=72\ km/h$	$\Delta t=2\ sec$		$\Delta\chi$
6.	$\upsilon=\frac{\Delta\chi}{\Delta t}$	$\upsilon=36\ km/h$	$\Delta\chi=10\ m$		Δt
7.	$\upsilon=\upsilon_0+\alpha\cdot t$	$\upsilon=144\ km/h$	$\alpha=2\ m/s^2$	$t=5\ sec$	υ_0
8.	$\upsilon=\upsilon_0+\alpha\cdot t$	$\upsilon=18\ km/h$	$\upsilon_0=36\ km/h$	$t=10\ sec$	α
9.	$\upsilon=\upsilon_0+\alpha\cdot t$	$\upsilon=42\ km/h$	$\upsilon_0=6\ km/h$	$\alpha=2\ m/s^2$	t
10.	$\chi=\upsilon_0 t+\frac{1}{2}\alpha t^2$	$\upsilon_0=72\ km/h$	$\alpha=2\ m/s^2$	$t=10\ sec$	χ
11.	$\chi=\upsilon_0 t+\frac{1}{2}\alpha t^2$	$\chi=72\ km$	$\upsilon_0=10\ m/s$	$t=10\ sec$	α
12.	$\chi=\upsilon_0 t+\frac{1}{2}\alpha t^2$	$\chi=72\ km$	$\alpha=1\ m/s^2$	$t=10\ sec$	υ_0
13.	$\chi=\frac{1}{2}\alpha t^2$	$\chi=1,8\ m$	$\alpha=10\ m/s^2$		t
14.	$F=m\alpha$	$F=25\ N$	$\alpha=1,25\ m/s^2$		m
15.	$F=m\alpha$	$F=3,6\ N$	$m=0,04\ kgr$		α
16.	$s=\frac{1}{2}gt^2$	$s=0,8\ m$	$g=10\ m/s^2$		t
17.	$s=\frac{1}{2}gt^2$	$g=10\ m/s^2$	$t=0,2\ sec$		s
18.	$F=\sqrt{F_1^2+F_2^2}$	$F_1=5\ N$	$F_2=12\ N$		F
19.	$F=\sqrt{F_1^2+F_2^2}$	$F=5\ N$	$F_2=3\ N$		F_1

2.1.5 Γενικές Ασκήσεις

163. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

α) $1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3+5^3+4^3+3^3+2^3+1^3$ β) $6+6+6+6^3+6^3+6^3$

164. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς χ , y , ω αν :

1.	$(\alpha-1)^2+(2-\beta)^2=0$	2.	$2\alpha^2+9\beta^2+4\alpha-6\beta+3=0$
3.	$\chi^2+y^2-2(\chi-y)+2=0$	4.	$\chi^2+y^2+13=2(3y-2\chi)$
5.	$\chi^2+y^2=4(y-1)$	6.	$(\chi+5)^2+(y-2)^2=4(\chi+y+1)$
7.	$2\chi^2+y^2+4=4\chi+2\chi y$	8.	$2\chi^2+9y^2=-9-6\chi(1-y)$
9.	$\chi^2+y^2+10=2(\chi-3y)$	10.	$\chi^2-2\chi+y^2-4y=-5$
11.	$\chi^2+y^2+\omega^2+6=2(\chi-y+2\omega)$	12.	$3\chi^2+y^2+\omega^2+4=2\chi(y-\omega+2)$

13.	$4\chi^2-4\chi y+5y^2+2\omega^2-8\omega+16-4y\omega=0$		

165. Να συγκριθούν οι αριθμοί :

1.	81^{80} και 27^{100}	2.	$5^{20}\cdot 7^{12}$ και $7^{20}\cdot 5^{12}$	3.	$6^6\cdot 3^8$ και 3^{20}
4.	3^{34} και 2^{51}				

166. Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $\alpha^\nu-\beta^\nu=(\alpha-\beta)\left(\alpha^{\nu-1}+\alpha^{\nu-2}\beta+\alpha^{\nu-3}\beta^2+\alpha^{\nu-4}\beta^3+...+\alpha\beta^{\nu-2}+\beta^{\nu-1}\right)$,
αποδείξτε ότι : α) ο αριθμός $3^{15}-1$ διαιρείται με το 26
β) ο αριθμός $2^{35}-1$ διαιρείται με το 31

167. α) Να αποδείξετε ότι : $\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{(\alpha-\beta)^2+\alpha\beta}=\alpha+\beta$

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης : $\dfrac{\left(\dfrac{543}{888}\right)^3+\left(\dfrac{345}{888}\right)^3}{\left(\dfrac{543}{888}-\dfrac{345}{888}\right)^2+\dfrac{543\cdot 345}{888^2}}$

168. Αν $\alpha+\beta+\gamma=0$ και $\alpha\neq-\beta$, $\beta\neq-\gamma$, $\gamma\neq-\alpha$, δείξτε ότι :
$$\frac{\alpha^2-\beta^2-2\beta\gamma}{\alpha+\beta}+\frac{\beta^2-\gamma^2-2\gamma\alpha}{\beta+\gamma}+\frac{\gamma^2-\alpha^2-2\alpha\beta}{\gamma+\alpha}=0$$
(Υπόδειξη : προσθέστε και αφαιρέστε στον αριθμητή του πρώτου κλάσματος το γ^2 κ.ο.κ.)

169. Να αποδείξετε ότι : $\left(\alpha^\chi-\beta^y\right)^2-\alpha^{2\chi-2}\cdot\beta^{2y-3}\cdot\left(\dfrac{\alpha^2}{\beta^{2y-3}}+\dfrac{\beta^3}{\alpha^{2\chi-2}}\right)=2\alpha^\chi\beta^y$

170. Αν α , β $\in\mathbf{R^*}$ και ισχύει η σχέση $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=-\dfrac{1}{3}$ **(1)** , αποδείξτε ότι $\dfrac{\beta}{\alpha^2}+\dfrac{\alpha}{\beta^2}+\dfrac{\alpha\beta}{27}=1.$
(Υπόδειξη : Υψώστε τη σχέση **(1)** στην τρίτη δύναμη και μετά πολλαπλασιάστε με α·β)

171. Αν χ , y $\in\mathbf{R^*}$ και ισχύει η σχέση $\dfrac{1}{\chi}+y=-2$ **(1)** , αποδείξτε ότι $\chi^3y^3+8\chi^3=6\chi^2y-1$.

172. Να υπολογισθεί η παράσταση : $A=2019+2020\cdot 2019-2021\cdot 2018$.

173. Το πλήθος των ψηφίων του αριθμού $A=\left(\dfrac{5^{2017}+2^{2022}}{2}\right)^2-\left(\dfrac{5^{2017}-2^{2022}}{2}\right)^2$ είναι :

Α. 2018 **Β.** 2022 **Γ.** 2019 **Δ.** 2020 **Ε.** 2021

174. Να βρεθεί ο ακέραιος $A=\dfrac{334\cdot 663\cdot 331+327}{333^2}$. (Απ: 661)

175. Ο τηλεφωνικός κατάλογος περιέχει 9.991 ονόματα σε λιγότερες από 100 σελίδες. Σε κάθε σελίδα του περιέχει τον ίδιο αριθμό ονομάτων. Πόσες σελίδες έχει ο κατάλογος και πόσα ονόματα ανά σελίδα;

176. Να βρείτε όλους τους διψήφιους θετικούς ακεραίους αριθμούς, που έχουν την ιδιότητα: «αν από τον διψήφιο αριθμό αφαιρέσουμε το γινόμενο των ψηφίων του, βρίσκουμε αποτέλεσμα 16»
$\left(\text{Απ}: \chi-1=\dfrac{6}{10-y}\right)$

177. Δέκα τενίστες συμμετέχουν σε ένα τουρνουά τένις , όπου ο κάθε τενίστας αγωνίζεται μια φορά με κάθε ένα από τους υπόλοιπους τενίστες . Ο τενίστας i κερδίζει χ_i φορές και χάνει y_i φορές με $i = 1\ ,\ 2\ ,\ ...\ ,\ 10$. (Κανένας αγώνας τένις δεν λήγει ισόπαλος). Να αποδείξετε ότι :
$\chi_1^2 + \chi_2^2 + ... + \chi_{10}^2 = y_1^2 + y_2^2 + ... + y_{10}^2$.

178. **<u>$N = N + 1$. Είναι δυνατόν ;</u>**

$(\nu+1)^2 = \nu^2 + 2\nu + 1$ Η γνωστή μας ταυτότητα

$(\nu+1)^2 - (2\nu+1) = \nu^2$ Απομονώνουμε το ν^2

$(\nu+1)^2 - \nu(2\nu+1) - (2\nu+1) = \nu^2 - \nu(2\nu+1)$ Αφαιρούμε και από τα δύο μέλη $-\nu(2\nu+1)$

$(\nu+1)^2 - (\nu+1)(2\nu+1) = \nu^2 - \nu(2\nu+1)$ Παραγοντοποίηση στο 1^o μέλος

$(\nu+1)^2 - (\nu+1)(2\nu+1) + \frac{1}{4}(2\nu+1)^2 = \nu^2 - \nu(2\nu+1) + \frac{1}{4}(2\nu+1)^2$

Προσθέτουμε και στα δύο μέλη $\frac{1}{4}(2\nu+1)^2$

$\left[(\nu+1) - \frac{1}{2}(2\nu+1)\right]^2 = \left[\nu - \frac{1}{2}(2\nu+1)\right]^2$ Είναι ταυτότητες της μορφής $(\alpha-\beta)^2$

$(\nu+1) - \frac{1}{2}(2\nu+1) = \nu - \frac{1}{2}(2\nu+1)$ Αποτετραγωνίζουμε

$(\nu+1) = \nu$ Απαλείφουμε τους ίσους παράγοντες $-\frac{1}{2}(2\nu+1)$

ΠΟΥ ΕΙΝΑΙ ΤΟ ΛΑΘΟΣ ;